

**H. Moysés  
Nussenzveig**



**3** *Eletromagnetismo*

**CURSO DE**

**FÍSICA**

**BÁSICA**



**H. MOYSÉS NUSSENZVEIG**  
Professor Emérito do Instituto de Física da  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

*Curso de*

**FÍSICA BÁSICA 3**

**ELETROMAGNETISMO**

1ª edição com 107 problemas



**EDITORA EDGARD BLÜCHER**  
[www.blucher.com.br](http://www.blucher.com.br)

© 1997 H. Moysés Nussenzveig

1ª edição - 1997

5ª reimpressão - 2006

*É proibida a reprodução total ou parcial  
por quaisquer meios  
sem autorização escrita da editora*

EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.

Rua Pedroso Alvarenga, 1245 - cj. 22

04531-012 – São Paulo, SP – Brasil

Fax: (0xx11)3079-2707

e-mail: editora@blucher.com.br

site: www.blucher.com.br

*Impresso no Brasil      Printed in Brazil*

**ISBN 85-212-0134-6**

**FICHA CATALOGRÁFICA**

Nussenzveig, Herch Moysés  
Curso de Física básica/H. Moysés Nussenzveig - 1ª edição  
– São Paulo: Edgard Blücher, 1997

Bibliografia  
ISBN 85-212-0134-6

Conteúdo: Eletromagnetismo.

1. Física I. Título.

04-5239

CDD-530

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Física 530

# CONTEÚDO

PREFÁCIO . . . . .	V
CAPÍTULO 1 — INTRODUÇÃO . . . . .	1
1.1 A interação eletromagnética . . . . .	1
1.2 As divisões do eletromagnetismo . . . . .	2
CAPÍTULO 2 — A LEI DE COULOMB . . . . .	3
2.1 Carga elétrica . . . . .	3
2.2 Condutores e isolantes . . . . .	4
2.3 A lei de Coulomb . . . . .	6
2.4 O princípio de superposição . . . . .	8
2.5 A carga elementar . . . . .	11
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 2 . . . . .	12
CAPÍTULO 3 — O CAMPO ELÉTRICO . . . . .	15
3.1 Campo elétrico . . . . .	15
3.2 Cálculo do campo . . . . .	17
3.3 Linhas de força . . . . .	20
3.4 Fluxo e lei de Gauss . . . . .	22
3.5 Aplicações da lei de Gauss . . . . .	27
3.6 Divergência de um vetor e equação de Poisson . . . . .	33
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 3 . . . . .	38
CAPÍTULO 4 — O POTENCIAL ELETROSTÁTICO . . . . .	41
4.1 Recapitulação sobre campos conservativos . . . . .	41
4.2 O potencial coulombiano . . . . .	44
4.3 Exemplos de cálculo do potencial . . . . .	47
4.4 Dipolos elétricos . . . . .	51
4.5 Circulação e o rotacional . . . . .	58
	I



4.6 A forma local das equações da eletrostática . . . . .	65
4.7 Potencial de condutores . . . . .	67
4.8 Energia eletrostática . . . . .	71
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 4 . . . . .	73
 CAPÍTULO 5 — CAPACITÂNCIA E CAPACITORES. DIELÉTRICOS . .	75
5.1 Capacitor plano . . . . .	75
5.2 Capacitor cilíndrico . . . . .	77
5.3 Capacitor esférico . . . . .	78
5.4 Associação de capacitores . . . . .	79
5.5 Energia eletrostática armazenada . . . . .	80
5.6 Dielétricos . . . . .	86
5.7 Condições de contorno . . . . .	93
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 5 . . . . .	96
 CAPÍTULO 6 — CORRENTE ELÉTRICA . . . . .	99
6.1 Intensidade e densidade de corrente . . . . .	99
6.2 Conservação de carga e equação da continuidade . . . . .	101
6.3 Lei de Ohm e condutividade . . . . .	103
6.4 Modelo cinético para a lei de Ohm . . . . .	106
6.5 Propriedades ondulatórias dos elétrons . . . . .	109
6.6 Espectro de bandas: condutores, isolantes e semicondutores . . . . .	114
6.7 O efeito Joule . . . . .	119
6.8 Força eletromotriz . . . . .	120
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 6 . . . . .	125
 CAPÍTULO 7 — CAMPO MAGNÉTICO . . . . .	127
7.1 Definição de $\mathbf{B}$ . . . . .	128
7.2 Força magnética sobre uma corrente . . . . .	132
7.3 O efeito Hall . . . . .	135
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 7 . . . . .	137
 CAPÍTULO 8 — A LEI DE AMPÈRE . . . . .	139
8.1 A lei de Ampère . . . . .	140
8.2 O potencial escalar magnético . . . . .	143

8.3 A lei de Biot e Savart . . . . .	147
8.4 Forças magnéticas entre correntes . . . . .	156
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 8 . . . . .	158
 CAPÍTULO 9 — A LEI DA INDUÇÃO . . . . .	161
9.1 A lei da indução . . . . .	162
9.2 A lei de Lenz . . . . .	165
9.3 Geradores e motores . . . . .	169
9.4 O bétatron . . . . .	172
9.5 Indutância mútua e auto-indutância . . . . .	175
9.6 Energia magnética . . . . .	182
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 9 . . . . .	186
 CAPÍTULO 10 — CIRCUITOS . . . . .	189
10.1 Elementos de circuito . . . . .	189
10.2 As leis de Kirchhoff . . . . .	191
10.3 Transientes em circuitos R-C e R-L . . . . .	193
10.4 Oscilações livres num circuito L-C . . . . .	195
10.5 Oscilações amortecidas: circuito R-L-C . . . . .	198
10.6 Circuitos AC . . . . .	202
10.7 Ressonância: circuito R-L-C . . . . .	211
10.8 Transformadores . . . . .	215
10.9 Filtros . . . . .	217
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 10 . . . . .	227
 CAPÍTULO 11 — MATERIAIS MAGNÉTICOS . . . . .	231
11.1 Correntes de magnetização . . . . .	231
11.2 O campo $\mathbf{H}$ . . . . .	235
11.3 A razão giromagnética . . . . .	237
11.4 Diamagnetismo . . . . .	240
11.5 Paramagnetismo . . . . .	242
11.6 Crítica do tratamento clássico . . . . .	245
11.7 Ferromagnetismo . . . . .	246
11.8 Circuitos magnéticos . . . . .	253
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 11 . . . . .	259

CAPÍTULO 12 — AS EQUAÇÕES DE MAXWELL . . . . .	261
12.1 Recapitulação . . . . .	261
12.2 Maxwell e a corrente de deslocamento . . . . .	263
12.3 A equação de ondas . . . . .	268
12.4 Ondas eletromagnéticas planas . . . . .	271
12.5 Balanço de energia e vetor de Poynting . . . . .	274
12.6 A equação de ondas inhomogênea . . . . .	278
12.7 Potenciais retardados . . . . .	282
12.8 O oscilador de Hertz . . . . .	287
12.9 Conclusão . . . . .	298
PROBLEMAS DO CAPÍTULO 12 . . . . .	299
RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS . . . . .	301
BIBLIOGRAFIA . . . . .	311
ÍNDICE . . . . .	313

# PREFÁCIO

Reatamos com este volume a série iniciada com os dois anteriores (*Física Básica 1 - Mecânica e Física Básica 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*), que é completada por *Física Básica 4 - Ótica, Relatividade, Física Quântica*.

O curso, mantendo o mesmo espírito e objetivos dos anteriores, apresenta a fundamentação fenomenológica da teoria eletromagnética, seguindo de perto seu desenvolvimento histórico. São empregados os operadores vetoriais, já antevistos na mecânica e na hidrodinâmica, cuja interpretação intuitiva é extensamente discutida. As equações de Maxwell vão sendo construídas de forma gradual.

O campo magnético é também introduzido fenomenologicamente, sem adotar o modismo de apresentá-lo como efeito relativístico, que desafiaria a compreensão de estudantes neste nível.

Circuitos são tratados de forma unificada, incluindo filtros elétricos como exemplo mais simples e intuitivo dos espectros de bandas em estruturas periódicas, servindo de introdução às bandas eletrônicas nos sólidos.

Uma das maiores dificuldades num curso de teoria eletromagnética clássica é o tratamento dos campos em meios materiais. O dilema do professor é permanecer fiel ao mote, adotado em toda série, de apresentar ‘a verdade, somente a verdade, embora não toda a verdade.’ Para isto, a discussão de modelos clássicos tem de ser acompanhada da crítica desses modelos, esboçando as conseqüências da teoria quântica da matéria, mesmo antes de sua abordagem, que só ocorrerá na parte final do curso (volume 4). Procurou-se antecipar parte dos resultados do tratamento quântico, descrevendo os conceitos subjacentes de forma meramente qualitativa. Uma compreensão mais profunda só poderá ser alcançada mais tarde.

Como preâmbulo da ótica eletromagnética, a ser desenvolvida no volume 4, são discutidos, na parte final do curso, ondas eletromagnéticas, potenciais retardados e radiação de dipolo.

Os problemas no final de cada capítulo não são meros exercícios de aplicação de fórmulas: procuram estimular a iniciativa e o raciocínio, testando o grau de compreensão dos alunos. É altamente recomendável a elaboração de listas semanais de problemas, que devem ser corrigidos e discutidos.

Pressupõe-se ainda que seja ministrado em paralelo um curso de laboratório onde o aluno encontre a vivência e realização concreta dos fenômenos descritos pela teoria, jamais perdendo de vista que a física é uma ciência experimental. Experiências de demonstração também cumprem um papel importante.

A Fundação José Bonifácio da Universidade Federal do Rio de Janeiro contribuiu com um auxílio para a preparação do texto, cabendo registrar aqui o agradecimento do autor por essa valiosa colaboração.

Rio de Janeiro, 31 de janeiro de 1997

H. Moysés Nussenzveig

# 1

# INTRODUÇÃO

Que interesse tem o estudo do eletromagnetismo? Nesta introdução, será dada uma idéia preliminar da importância desse campo da física. Também será esquematizada a seqüência segundo a qual vamos abordar o seu estudo.

## 1.1 A interação eletromagnética

Segundo a classificação atual, existem na Natureza quatro interações fundamentais: nuclear forte, eletromagnética, nuclear fraca e gravitacional (em ordem decrescente de intensidade). Até agora só havíamos estudado uma delas: a gravitação, cujos efeitos se fazem sentir principalmente na escala astronômica.

O eletromagnetismo é outra interação fundamental, muito mais importante do que a gravitação no domínio que nos é mais familiar. Com efeito, as forças que atuam na escala macroscópica, responsáveis pela estrutura da matéria e pela quase totalidade dos fenômenos físicos e químicos que intervêm em nossa vida diária, são de natureza eletromagnética. Isso não quer dizer que seus efeitos possam sempre ser analisados pela física clássica. Em tudo aquilo que depende da escala atômica – que também tem reflexos macroscópicos – é preciso empregar a física quântica. Entretanto, a interação relevante, também no tratamento quântico, é eletromagnética.

Ainda de um ponto de vista fundamental, a interação eletromagnética é aquela que compreendemos melhor. Seu tratamento teórico, no nível quântico (eletrodinâmica quântica), serve hoje em dia como modelo para o tratamento de todas as demais interações conhecidas.

No desenvolvimento da física, a teoria clássica da interação eletromagnética, formulada por Maxwell, desempenhou um papel central, como protótipo de uma *teoria de campo*. Ela permitiu obter uma das grandes sínteses da ciência, a unificação do eletromagnetismo e da ótica, mostrando que a luz é uma onda eletromagnética. Além disso, serviu como ponte para a elaboração da teoria da relatividade restrita. Para isso, foi necessário modificar a própria mecânica newtoniana, mas a teoria de Maxwell permaneceu intacta.



As aplicações do eletromagnetismo revolucionaram toda a tecnologia. Indústria, iluminação, transportes, computação, entretenimento, funcionam com base na energia elétrica, na "fada Eletricidade", como foi chamada no início deste século. Ondas eletromagnéticas (rádio, radar, televisão) são empregadas em todos os nossos sistemas de comunicação.

Em suma, o eletromagnetismo é uma disciplina básica tanto do ponto de vista teórico como prático.

## 1.2 As divisões do eletromagnetismo

Até o fim do século 18, eletricidade e magnetismo eram pouco mais que curiosidades de laboratório, sem qualquer interconexão conhecida. Em ambos os casos, conheciam-se apenas fenômenos estáticos. A pilha voltaica acabara de ser inventada e conheciam-se alguns dos efeitos produzidos por correntes elétricas.

Foi só no início do século 19 que se descobriram os efeitos magnéticos das correntes. Pouco depois, veio a grande descoberta de Faraday do fenômeno da indução eletromagnética: em linguagem atual, campos magnéticos variáveis com o tempo produzem campos elétricos. O efeito simétrico, a produção de campos magnéticos por campos elétricos que variam com o tempo, foi predito teoricamente por Maxwell, quando formulou suas famosas equações, que sintetizam todo o eletromagnetismo clássico.

A verificação experimental da teoria de Maxwell foi obtida com as experiências de Hertz de produção de ondas de rádio. No princípio do século 20, com a incorporação do eletromagnetismo à relatividade restrita, percebeu-se que campos elétricos e magnéticos são aspectos diferentes de um mesmo campo fundamental, o *campo eletromagnético*, completando-se assim o arcabouço da teoria dentro da física clássica. Sua evolução posterior foi no sentido de compatibilizá-la com a teoria quântica, levando à formulação da eletrodinâmica quântica.

Neste curso introdutório, seguiremos a evolução histórica, discutindo em sequência campos eletrostáticos, correntes elétricas estacionárias e os campos magnéticos por elas produzidos. Discutiremos depois a indução eletromagnética. Finalmente, chegaremos às equações de Maxwell e às ondas eletromagnéticas.

Diversos tópicos, tais como as correntes de condução, a polarização de dielétricos e materiais magnéticos, dizem respeito a campos no interior de meios materiais e têm a ver com a estrutura da matéria. Para tratá-los, é necessário, em princípio, empregar a teoria quântica. Em alguns casos pode-se empregar um modelo clássico como guia, mas a descrição correta é necessariamente quântica. Procuraremos chamar a atenção sobre esses pontos, e, na medida do possível, fornecer algumas informações qualitativas sobre o tratamento quântico.

### Notação

Vetores serão sempre representados em **negrito**, ou seja, **v** em lugar de  $\vec{v}$ .

# 2

## A LEI DE COULOMB

Neste capítulo, vamos introduzir o conceito de *carga elétrica* e discutir a lei de interação entre duas cargas, descoberta por Coulomb.

### 2.1 Carga elétrica

Por que razão uma interação muitas ordens de grandeza mais forte do que a gravitacional só foi investigada muito depois desta e não se manifesta de forma mais diretamente perceptível? A razão é que, enquanto a força gravitacional é sempre atrativa, as forças elétricas podem ser tanto atrativas como repulsivas. O análogo da massa gravitacional, a carga elétrica, manifesta-se de duas formas diferentes, que convencionamos chamar de *positiva* ou *negativa*, levando à possibilidade de atração ou repulsão, e a matéria é normalmente neutra, cancelando os efeitos das interações elétricas.

Pode-se produzir um desequilíbrio na distribuição das cargas através do atrito entre substâncias diferentes. Num dia seco, um pente que se esfrega no cabelo atrai pedacinhos de papel. Essa propriedade de *eletrização por atrito* já era conhecida na Grécia antiga: sabia-se que o âmbar, uma resina amarelada (seiva de árvore solidificada ao longo de séculos), quando atritado com pele de animais, atrai partículas leves, como sementes ou fragmentos de palha. O nome do âmbar, em grego, é "elektron": esta é a origem da palavra 'eletricidade' e do nome da partícula elementar 'elétron'.

Em 1600, William Gilbert, médico da corte na Inglaterra, publicou seu tratado *De magnete*, onde menciona outros corpos que se eletrizam por atrito, tais como o vidro, o enxofre e o lacre.

A existência de dois tipos diferentes de cargas foi descoberta por Charles François du Fay em 1733, quando mostrou que duas porções do mesmo material, por exemplo âmbar, eletrizadas por atrito com um tecido, repeliam-se, mas o vidro eletrizado atraía o

âmbar eletrizado. O tipo de carga que chamou de "vítrea" foi depois chamado por Benjamin Franklin de *positiva*, e a "resinosa" recebeu o nome de *negativa*.

A justificativa para esses nomes baseou-se em experiências realizadas por Franklin, que o convenceram de que o processo de eletrização não *cria* cargas: apenas as *transfere* de um corpo a outro. Normalmente, um corpo é neutro por ter igual quantidade de carga positiva e negativa: quando ele transfere carga de um dado sinal a outro corpo, fica carregado com carga de mesmo valor absoluto e sinal contrário. Essa hipótese de Franklin constitui a mais antiga formulação de um princípio fundamental da física, a *lei de conservação da carga elétrica*.

Franklin acreditava que era a carga positiva, que imaginava como um fluido, aquela que se transferia. Hoje sabemos que, na eletrização por atrito, são os elétrons que se transferem de um corpo a outro, e sua carga é negativa, segundo a convenção historicamente adotada – que é inteiramente arbitrária. A transferência ocorre por contato, e o objetivo do atrito é meramente o de incrementar o contato.

O sinal da carga adquirida por um corpo na eletrização por atrito depende da substância com a qual é atritado: o âmbar se eletriza negativamente por atrito com lã, mas positivamente quando atritado com enxofre.

A experiência de du Fay mostra que *cargas de mesmo sinal se repelem: cargas de sinais opostos se atraem*.

## 2.2 Condutores e isolantes

Um contemporâneo de du Fay, Stephen Gray, descobriu em 1729 que as cargas elétricas podiam ser *transmitidas* através de diferentes materiais, que foram chamados de *condutores*, ao passo que tendiam a permanecer retidas em outros, chamados de *isolantes*.

O âmbar, o quartzo, o vidro, a água destilada, os gases em condições normais (em particular o ar seco), a borracha e a maioria dos plásticos são bons isolantes. Os metais, a água contendo ácidos, bases ou sais em solução, o corpo humano e a terra são bons condutores.

É muito difícil realizar experiências de eletrostática em muitas localidades brasileiras, especialmente no verão, devido ao elevado grau de umidade na atmosfera, que tende a recobrir os objetos com uma fina camada de água, tornando-os condutores. Nos países frios, o aquecimento no inverno seca o ar, e é comum que o corpo fique eletrizado quando se caminha sobre um tapete espesso, a ponto de soltar faíscas quando se toca num objeto metálico.

Um janota inglês, Robert Symmer, que usava dois pares de meias ao mesmo tempo, um de lã para proteger do frio e o outro de seda pela aparência, comentou em 1759 que, quando as removia, tirando uma de dentro da outra, elas se inflavam, assumindo a forma dos pés, e se atraíam (lã com seda) ou se repeliam (lã com lã) até uma boa distância uma da outra.

Quando encostamos a mão num objeto carregado, a carga se escoia para a terra através de nosso corpo: nossa pele, umedecida pela transpiração, é boa condutora. O escoamento através de um bom condutor é extremamente rápido, ao passo que um bom isolante pode permanecer carregado por muitas horas ou dias.

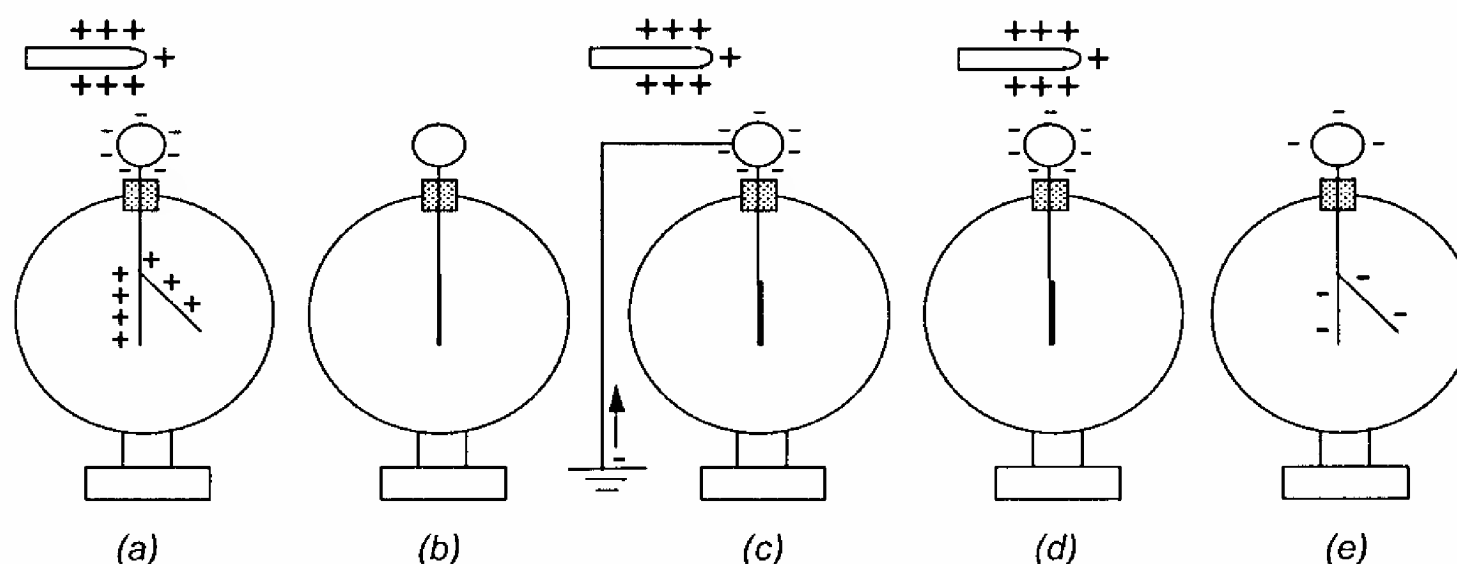


Figura 2.1 Eletroscópio: (a) — indução eletrostática; (c) a (e) — carga por indução

Vários dos efeitos já discutidos podem ser demonstrados com o auxílio de um *eletroscópio*. Conforme ilustrado na fig. 2.1, esse aparelho consiste num frasco de vidro com uma rolha isolante, atravessada por uma haste metálica encimada por uma bola de metal. Na parte inferior da haste está presa uma lâmina leve de folha de alumínio ou de ouro. O frasco protege esse conjunto das correntes de ar.

Quando aproximamos da bola um bastão de vidro carregado positivamente (por atrito com um pano de seda, por exemplo), as cargas negativas do conjunto haste-bola são atraídas para cima e a parte inferior fica carregada positivamente. A lâmina, com carga de mesmo sinal que a haste, é repelida por ela e se afasta, com ângulo de abertura tanto maior quanto maior a carga [fig.2.1.(a)].

Ao retirarmos o bastão, a carga total do eletroscópio volta ao zero, e a lâmina cai [fig.2.1 (b)]. A separação inicial da carga em (a) sob a influência do bastão chama-se *indução eletrostática*.

Na seqüência da fig. 2.1 (c)-(e), vemos como se pode carregar um corpo por indução. Para esse fim, aproximamos o bastão de vidro carregado positivamente, ao mesmo tempo que tocamos com a mão a bola do eletroscópio. Isso equivale a colocá-la em contato com a terra. Tudo se passa como se a carga positiva separada por indução e repelida pelo bastão se escoasse para a terra [na verdade, conforme indicado pela seta na fig. 2.1 (c), são elétrons provenientes da terra que neutralizam a carga positiva separada].

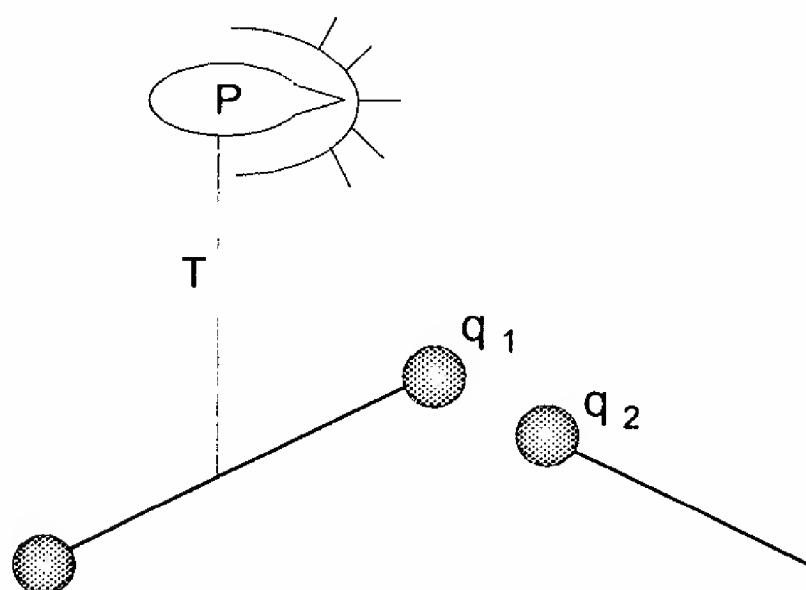
Ao retirarmos a mão da bola, a carga negativa induzida nela permanece, ainda sob a atração do bastão [fig. 2.1.(d)]. Removido o bastão, a carga se redistribui pelo conjunto bola-haste, que permanece carregado, provocando o afastamento da lâmina [fig.2.1. (e)].

## 2.3 A lei de Coulomb

Na eletrostática, consideramos somente configurações de cargas em repouso (com respeito a um referencial inercial), em equilíbrio estático: nada varia com o tempo.

Se as dimensões de dois corpos carregados são desprezíveis em confronto com a distância entre eles, podemos tratá-los como *cargas puntiformes*, conceito idealizado análogo ao de massas puntiformes na mecânica. A interação eletrostática básica é então aquela entre duas cargas puntiformes em repouso no vácuo.

A lei de forças correspondente foi primeiro inferida por Joseph Priestley, o descobridor do elemento oxigênio. Em 1766, repetindo uma experiência já feita antes por seu amigo Franklin, ele verificou que, quando um recipiente metálico é eletrizado, a sua superfície interna não fica carregada e não são exercidas forças elétricas sobre um corpo de prova inserido dentro dele. Priestley escreveu: "Não podemos inferir desse experimento que a atração elétrica está sujeita às mesmas leis que a gravitação, variando com o inverso do quadrado da distância, uma vez que se demonstra facilmente que, se a Terra tivesse a forma de uma casca, um corpo dentro dela não sofreria atração nenhuma?"



**Figura 2.2** Balança de torção para medida da força entre duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ .

a um ponteiro P com uma escala graduada.

Com a balança inicialmente em equilíbrio, carrega-se uma das esferinhas com uma carga  $q_1$  e aproxima-se dela outra esferinha com carga  $q_2$ , situada sobre o círculo gerado pela rotação da haste em torno do eixo. O torque produzido pela interação entre as cargas faz girar a haste. Para reconduzi-la à posição inicial de equilíbrio, é preciso torcer a fibra através do ponteiro.

A força de interação pode ser calculada em termos do ângulo de rotação do ponteiro.

O resultado obtido por Coulomb se exprime por

A investigação experimental direta da lei de forças foi feita em 1785 por Charles-Augustin de Coulomb, com o auxílio de uma *balança de torção*, instrumento inventado independentemente por ele e por John Mitchell, que foi depois empregado por Cavendish para medir a constante gravitacional.\* Conforme esquematizado na fig.2.2, a balança consta de uma haste isolante com duas esferinhas metálicas nas pontas (uma delas serve de contrapeso), suspensa por uma fibra fina T ligada

\* Física Básica 1, Sec 10.8

$$\mathbf{F}_{2(1)} = k \frac{q_1 q_2}{(r_{12})^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F}_{1(2)} \quad (2.3.1)$$

onde  $\mathbf{F}_{i(j)}$  é a força sobre a partícula  $i$ , devida à partícula  $j$ ,  $r_{12}$  é a distância entre as duas partículas carregadas e  $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$  é o vetor unitário da direção de 1 para 2 (fig. 2.3). A constante de proporcionalidade  $k$  depende da escolha da unidade de carga elétrica, que discutiremos abaixo.

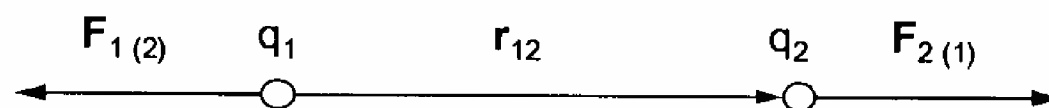


Figura 2.3 Forças coulombianas para um par de cargas

Vemos portanto (lei de Coulomb) que *a força é proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas* (como inferido por Priestley por analogia com a gravitação). A constante  $k$  é positiva: se  $q_1$  e  $q_2$  têm o mesmo sinal, como na fig. 2.3, a força é repulsiva; se têm sinais opostos, a força é atrativa.

A dependência inversa com o quadrado da distância pode ser verificada variando a distância entre as cargas. Nas experiências de Coulomb, a precisão não era muito grande (da ordem de alguns por cento). Uma determinação mais precisa já havia sido feita por Cavendish em 1772, por um método baseado na idéia de Priestley, que será discutido mais adiante (Seç. 4.7). Se chamarmos de  $2 + \epsilon$  o expoente de  $r_{12}$  no denominador da lei de Coulomb, Cavendish mostrou que  $|\epsilon| < 2\%$ . Usando métodos análogos, E. R. Williams e colaboradores demonstraram,\* em 1971, que  $|\epsilon| < 3 \times 10^{-16}$ . A dependência da distância na lei de Coulomb foi portanto verificada com enorme precisão.

Se usarmos a lei de Coulomb para *definir* o produto das cargas, pode parecer que a proporcionalidade a cada uma delas não tem conteúdo: é mera definição. Porém, se dispusermos de quatro cargas  $q_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) e se medirmos as interações entre pares sempre à mesma distância  $|r_{ij}|$ , resulta da (2.3.1) que devemos ter

$$\left| \mathbf{F}_{2(3)} \right| / \left| \mathbf{F}_{1(3)} \right| = \left| \mathbf{F}_{2(4)} \right| / \left| \mathbf{F}_{1(4)} \right|$$

pois ambos os membros valem  $q_2/q_1$ . Logo, podemos testar esse resultado e medir a *razão* de duas cargas elétricas. Resta somente arbitrar a escolha da *unidade de carga elétrica*.

No sistema CGS de unidades, que adota cm, g, s como unidades básicas, toma-se  $k = 1$  na (2.3.1) para interação entre cargas no vácuo, e define-se a unidade de carga como aquela que exerce uma força de 1 dina sobre outra carga idêntica à distância de 1 cm. Esse sistema é usualmente empregado em física atômica.

\* E. R. Williams, J. E. Faller e H. A. Hill, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 721 (1971).



Entretanto, a unidade assim definida é muito pequena para as aplicações práticas, particularmente na engenharia. Vamos adotar o sistema mais empregado nas aplicações práticas do eletromagnetismo, que é o Sistema Internacional (SI), baseado em m, kg, s e na escolha de uma unidade independente para corrente elétrica, o ampère (A), que será definido mais adiante. Como a corrente representa carga por unidade de tempo, a unidade de carga elétrica nesse sistema, o “*coulomb* (C)”, corresponde à carga que atravessa por segundo a secção de um condutor que transporta uma corrente contínua de 1 A.

No SI, a constante de proporcionalidade  $k$  da (2.3.1) é escrita da seguinte forma:

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cong 8,98755 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad (2.3.2)$$

onde  $c$  é o valor numérico da velocidade da luz no vácuo, atualmente definido como exatamente 299 792 458 (m/s). A constante  $\epsilon_0$  é denominada *permissividade do espaço livre*, por razões que se tornarão aparentes mais tarde. O fator  $4\pi$  é introduzido no denominador para simplificar fórmulas subseqüentes. Com o valor de  $k$  dado pela (2.3.2), as cargas medidas em coulombs e as distâncias em metros, as forças de interação são obtidas em newton (N), e a lei de Coulomb assume a forma que empregaremos

$$\mathbf{F}_{2(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(r_{12})^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F}_{1(2)} \quad (2.3.3)$$

## 2.4 O princípio de superposição

Que acontece se tivermos mais de duas cargas elétricas no vácuo? A experiência mostra que os efeitos das interações entre elas se superpõem, ou seja a força eletrostática que atua sobre cada uma é a resultante (soma vetorial) de suas interações com todas as demais cargas, obtidas aplicando a cada par a lei de Coulomb.

Assim, a força sobre a carga  $i$  é dada por

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i(j)} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{(r_{ji})^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} \quad (2.4.1)$$

onde a soma é estendida a todas as demais cargas.

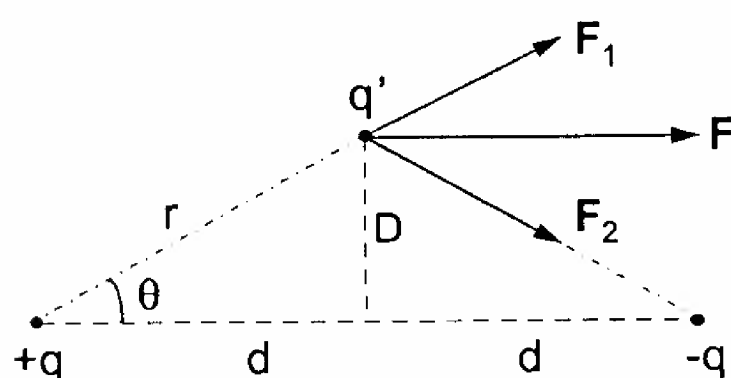


Figura 2.4 Forças sobre carga  $q'$

### Exemplo 1

Duas cargas puntiformes,  $+q$  e  $-q$ , estão situadas no vácuo, separadas por uma distância  $2d$ . Com que força atuam sobre uma terceira carga  $q'$ , situada sobre a mediatriz do segmento que liga as duas cargas, a uma distância  $D$  do ponto médio deste segmento? (Fig. 2.4)

Supondo que  $q$  e  $q'$  tenham o mesmo sinal, as forças  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  exercidas sobre  $q'$  respectivamente por  $+q$  e  $-q$  têm a mesma magnitude e as orientações indicadas na fig. 2.4. A força resultante  $\mathbf{F}$  tem magnitude

$$|\mathbf{F}| = 2|\mathbf{F}_1|\cos\theta = 2|\mathbf{F}_1|d/r$$

Usando a lei de Coulomb, obtemos finalmente

$$|\mathbf{F}| = \frac{qq'}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{r^3} = \frac{qq'}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2 + D^2)^{3/2}}$$

A força é paralela ao segmento que une as duas cargas e aponta para  $-q$ . Se  $q'$  tem sinal oposto a  $q$ , o sentido de  $\mathbf{F}$  é o oposto.

Empregando o princípio de superposição, podemos passar da descrição em termos de cargas puntiformes à descrição macroscópica em termos de cargas distribuídas sobre volumes. Se subdividimos um volume  $v$  em porções  $\Delta v_j$  suficientemente pequenas para que a carga  $\Delta q_j$  em cada uma delas possa ser tratada como puntiforme, teremos

$$\Delta q_j = \rho_j \Delta v_j$$

onde  $\rho_j$  é a densidade de carga (carga por unidade de volume) na porção  $\Delta v_j$ .

Passando ao limite em que se faz  $\Delta v_j$  tender para zero, uma soma como a da (2.4.1) tende a uma *integral de volume*:

$$\sum_j q_j(\dots) = \sum_j \Delta v_j \rho_j(\dots) \rightarrow \int_v dv(\dots) = \int_v dv \rho(\dots) \quad (2.4.2)$$

onde  $dv$  é o elemento de volume,  $\rho$  é a *densidade volumétrica de carga*, que pode variar de ponto a ponto no interior do volume  $v$  e os parênteses indicam o resto da expressão, que também deve ser transformada. Já vimos transformações semelhantes no cálculo de centros de massa e momentos de inércia de distribuições contínuas de massa (*Física Básica 1*, Seções 8.4 e 12.2).

Um exemplo concreto de uma distribuição volumétrica de carga é a distribuição de íons positivos e negativos de uma descarga elétrica num gás (tal como numa lâmpada fluorescente); mais geralmente, a distribuição num corpo isolante carregado.

Também podemos considerar, como casos limites, uma distribuição de carga sobre uma superfície  $S$ , com *densidade superficial de carga*  $\sigma$ ,

$$dq = \sigma dS \quad (2.4.3)$$

onde  $dS$  é o elemento de superfície (a soma se transforma numa *integral de superfície*) e uma distribuição de carga sobre um fio, descrito como uma linha  $l$ , com *densidade linear de carga*  $\lambda$ ,

$$dq = \lambda dl \quad (2.4.4)$$

onde  $dl$  é o elemento de linha (a soma se transforma numa *integral de linha*). Note que, em cada um desses casos, os demais termos do integrando, indicados por (...) na (2.4.2), variam em geral de ponto a ponto, inclusive as direções de vetores. Uma integral vetorial reduz-se a três integrais escalares, uma para cada componente.

Veremos que a carga de um condutor fica localizada na sua superfície e pode ser descrita como uma distribuição superficial de carga. É importante lembrar que estamos empregando um tratamento *macroscópico*. No nível microscópico, uma distribuição superficial ocupa na realidade um certo volume, que é tipicamente de algumas camadas atômicas. Entretanto, para distâncias macroscópicas da superfície (que são muito maiores que a espessura da distribuição), podemos desprezar a espessura e empregar o conceito idealizado de distribuição superficial. Considerações análogas aplicam-se a uma distribuição linear de carga.

### Exemplo 2

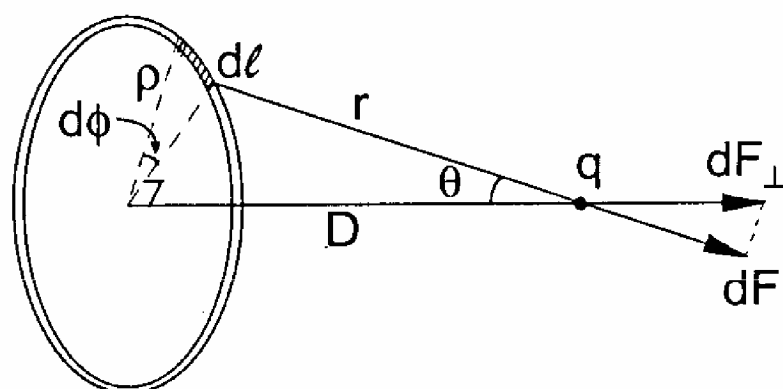


Figura 2.5 Força de um anel carregado sobre uma carga  $q$

Uma carga  $Q$  está distribuída uniformemente sobre um anel circular vertical de raio  $\rho$  e de espessura desprezível. Qual é a força exercida sobre uma carga pontiforme  $q$  situada sobre o eixo horizontal que passa pelo centro do anel, a uma distância  $D$  do seu plano?

A densidade linear de carga sobre o anel é

$$\lambda = Q / (2\pi\rho)$$

Um elemento de linha  $dl$  do anel que subtende um ângulo  $d\phi$  no seu centro (fig. 2.5), onde  $\phi$  é o ângulo azimutal no plano do anel, tem uma carga  $dQ = \lambda dl = \lambda \rho d\phi$  e exerce uma força  $d\mathbf{F}$  sobre a carga  $q$ , cujo módulo é dado por (supondo  $q$  e  $Q$  de mesmo sinal)

$$|d\mathbf{F}| = \frac{qdQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda q \rho d\phi}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qq d\phi}{8\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

Decompondo  $d\mathbf{F}$  numa componente  $d\mathbf{F}_{\perp}$  perpendicular ao plano do anel e uma componente paralela a este plano, vemos que, ao integrar sobre  $\phi$ , as componentes paralelas se

cancelam devido à simetria (para cada elemento  $dl$  existe outro, simétrico em relação ao centro, cuja contribuição à componente paralela é oposta); a componente perpendicular é dada por ( $\theta$  é a colatitude)

$$|d\mathbf{F}_\perp| = |d\mathbf{F}|\cos\theta = |d\mathbf{F}|(D/r)$$

Como todos os demais fatores são constantes, sobra somente a integral sobre  $d\phi$ , que é igual a  $2\pi$ . Logo, a força total é perpendicular ao plano do anel e de magnitude

$$|\mathbf{F}_\perp| = \frac{QqD}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{QqD}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + D^2)^{3/2}}$$

Em particular, se a distância  $D$  ao plano do anel é  $\gg \rho$ , podemos desprezar  $\rho^2$  em confronto com  $D^2$  e a força total tem magnitude  $Qq/(4\pi\epsilon_0 D^2)$ , mostrando que o anel se comporta, a distâncias muito maiores que as suas dimensões, como uma carga puntiforme  $Q$ , conforme seria de esperar. Para  $D = 0$ , a força se anula por simetria: elementos de carga diametralmente opostos exercem forças de mesmo módulo e sentidos contrários.

## 2.5 A carga elementar

O conceito de uma distribuição contínua de carga sugere que a carga elétrica, como a massa, pode variar continuamente. Isso não é verdade. Existe na natureza um valor mínimo  $e$  da carga: a carga do elétron é  $-e$  e a do próton  $+e$ . O valor de  $e$  é extremamente pequeno na escala macroscópica:

$$e = 1,602\,177 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (2.5.1)$$

Isso significa que, quando temos num fio uma corrente de 1 ampère, a carga total que atravessa sua secção transversal por segundo equivale à carga de  $6,24 \times 10^{18}$  elétrons, o que ilustra bem o valor microscópico de  $e$ .

Vimos no curso de Mecânica\* como Millikan demonstrou a existência da carga elementar em suas experiências com gotículas de óleo. As gotículas eram borrifadas (eletrizando-se por atrito) no espaço entre duas placas e eram iluminadas, o que permitia observá-las pela luz espalhada. Com as placas descarregadas, uma gotícula cai, atingindo uma velocidade terminal uniforme quando a resistência do ar equilibra seu peso (corrigido pelo empuxo do ar).

Com as placas carregadas, a força eletrostática exercida por elas permitia equilibrar a força gravitacional, mantendo a gotícula suspensa. A comparação de resultados

---

\* Física Básica 1, Seq. 5.4

obtidos nas duas situações permitia medir a carga da gotícula. Os valores obtidos eram sempre múltiplos inteiros (em geral pequenos) de  $e$ . Também era possível produzir variações de carga numa gotícula, usando um agente ionizante, tal como uma fonte radioativa. As variações observadas também eram sempre múltiplas inteiras de  $e$ . Diz-se que a carga é *quantizada* em unidades da *carga elementar*  $e$ .

Todas as partículas chamadas elementares carregadas observadas até hoje têm cargas que são múltiplos inteiros pequenos de  $e$ , em geral  $\pm e$ . Sabe-se que a carga do próton é igual e contrária à do elétron com erro relativo inferior a uma parte em  $10^{21}$ , o que indica com que grau de precisão se verifica a neutralidade da matéria (veja o início da Seq. 2.1).

Segundo o modelo dos quarks, essas partículas teriam cargas  $-e/3$  (quark  $d$ ) e  $+2e/3$  (quark  $u$ ); o próton, por exemplo, seria formado por dois quarks  $u$  e um quark  $d$ , com carga resultante  $+e$ . Entretanto, isso não contradiz a quantização da carga, pois os quarks não são observados como partículas livres: todas as tentativas nas últimas duas décadas para observar quarks livres foram infrutíferas: diz-se que estão sempre *confinados*.

Por que razão a carga elétrica é quantizada? Até hoje, ninguém sabe.

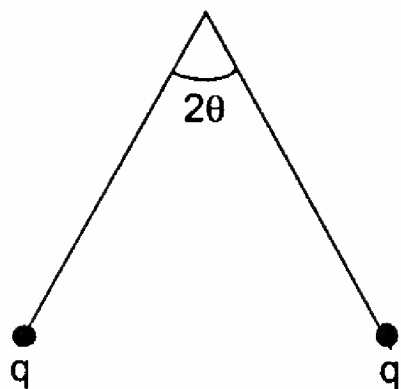
## PROBLEMAS

1. Mostre que a razão da atração eletrostática para a atração gravitacional entre um elétron e um próton é independente da distância entre eles e calcule essa razão.

2. Em 1 litro de hidrogênio gasoso, nas condições **NTP**: (a) Qual é a carga positiva total contida nas moléculas e neutralizada pelos elétrons? (b) Suponha que toda a carga positiva pudesse ser separada da negativa e mantida à distância de 1m dela. Tratando as duas cargas como puntiformes, calcule a força de atração eletrostática entre elas, em kgf. (c) Compare o resultado com uma estimativa da atração gravitacional da Terra sobre o Pão de Açúcar.

3. O modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio pode ser comparado ao sistema Terra-Lua, em que o papel da Terra é desempenhado pelo próton e o da Lua pelo elétron, a atração gravitacional sendo substituída pela eletrostática. A distância média entre o elétron e o próton no átomo é da ordem de  $0,5 \text{ \AA}$ . (a) Admitindo esse modelo, qual seria a frequência de revolução do elétron em torno do próton? Compare-a com a frequência da luz visível. (b) Qual seria a velocidade do elétron na sua órbita? É consistente usar a eletrostática nesse caso? É consistente usar a mecânica não-relativística?

4. Uma carga negativa fica em equilíbrio quando colocada no ponto médio do segmento de reta que une duas cargas positivas idênticas. Mostre que essa posição de equilíbrio é estável para pequenos deslocamentos da carga negativa em direções perpendiculares ao segmento, mas que é instável para pequenos deslocamentos ao longo dele.

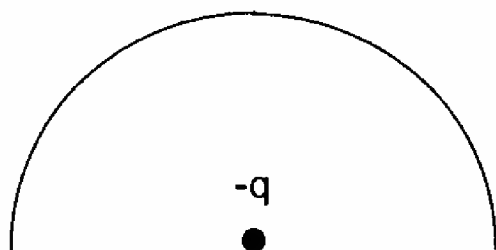
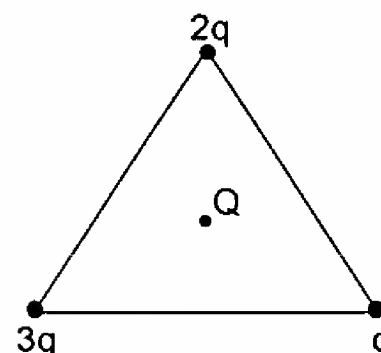


5. Duas esferinhas idênticas de massa  $m$  estão carregadas com carga  $q$  e suspensas por fios isolantes de comprimento  $l$ . O ângulo de abertura resultante é  $2\theta$  (fig.). (a) Mostre que

$$q^2 \cos \theta = 16\pi\epsilon_0 l^2 mg \sin^3 \theta$$

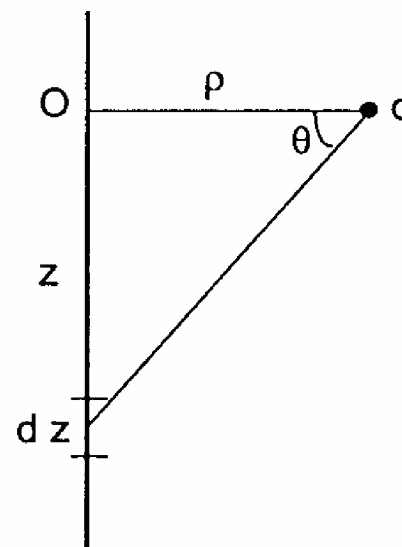
(b) Se  $m = 1$  g,  $l = 20$  cm e  $\theta = 30^\circ$ , qual é o valor de  $q$ ?

6. Cargas  $q$ ,  $2q$  e  $3q$  são colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado  $a$  (fig.). Uma carga  $Q$  de mesmo sinal que as outras três é colocada no centro do triângulo. Obtenha a força resultante sobre  $Q$  (em módulo, direção e sentido).

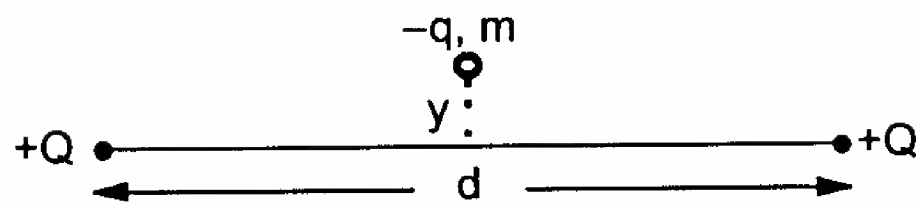


7. Uma carga  $Q$  é distribuída uniformemente sobre um fio semicircular de raio  $a$ . Calcule a força com que atua sobre uma carga de sinal oposto  $-q$  colocada no centro (fig.).

8. Um fio retilíneo muito longo (trate-o como infinito) está eletrizado com uma densidade linear de carga  $\lambda$ . Calcule a força com que atua sobre uma carga puntiforme  $q$  colocada à distância  $p$  do fio. **Sugestão:** tome a origem em O (fig.) e o fio como eixo  $z$ . Exprima a contribuição de um elemento  $dz$  do fio à distância  $z$  da origem em função do ângulo  $\theta$  da figura. Use argumentos de simetria.







9. Uma partícula está a uma distância de massa  $m$  e carga negativa  $-q$  está vinculada a mover-se sobre a mediatriz do segmento que liga duas cargas positivas  $+Q$ , separadas por uma distância  $d$  (fig.).

Inicialmente, a partícula  $y \ll d$  do centro desse segmento. Mostre que ela executa um movimento harmônico simples em torno do centro, e calcule a frequência angular  $\omega$  de oscilação.

# 3

## O CAMPO ELÉTRICO

Analogamente ao que foi feito no caso gravitacional, vamos introduzir neste capítulo o campo elétrico, um conceito cuja importância se tornará particularmente visível quando passarmos da eletrostática ao estudo da eletrodinâmica, em que se admitem variações com o tempo.

### 3.1 Campo elétrico

Pelo princípio de superposição, a força sobre uma carga puntiforme  $q_i$ , devida a sua interação eletrostática com outras cargas puntiformes fixas em posições predeterminadas, é proporcional a  $q_i$ , e pode ser escrita como [veja a (2.4.1)]

$$\mathbf{F}_i = q_i \mathbf{E}_i \quad (3.1.1)$$

onde

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{(r_{ji})^2} \hat{\mathbf{r}}_{ji} \quad (3.1.2)$$

Podemos então pensar nas demais cargas como ‘fontes’ do *campo elétrico*  $\mathbf{E}_i$ , que é ‘sentido’ pela carga  $q_i$  através da força  $\mathbf{F}_i$  dada pela (3.1.1); o campo representa assim a ‘força por unidade de carga’ atuando sobre  $q_i$  na posição onde está colocada. Analogamente, no Exemplo 2 da Seç. 2.4, o campo elétrico produzido pelo anel carregado na posição da carga  $q$  seria dado por  $\mathbf{E} = \mathbf{F}_\perp / q$ . A unidade de campo elétrico é o N/C.

A carga  $q$ , nesse exemplo, atua como *corpo de prova* para medir o valor do campo criado pelas demais cargas: a idéia básica é que *uma distribuição de cargas no espaço vazio (vácuo) afeta todos os pontos do espaço, produzindo em cada um deles um valor do campo elétrico, e a carga de prova revela a existência deste campo pela força nela exercida.*

Podemos visualizar a detecção do campo num ponto, imaginando colocar neste ponto uma pequena partícula carregada suspensa por um fio isolante (pêndulo eletrostático). Supondo desprezíveis a massa de partícula e do fio, a força eletrostática sobre a partícula seria equilibrada pela tensão do fio, cuja magnitude, dividida pela carga, daria a magnitude do campo; a direção e orientação do fio dariam a direção e o sentido do campo.

Entretanto, há um cuidado importante a tomar. A carga de prova também cria o seu próprio campo elétrico e pode assim perturbar a distribuição das demais cargas, modificando o campo que se deseja medir. Um exemplo disso é o efeito de indução eletrostática discutido na Seq. 2.2. Para minimizar essa perturbação, deve-se tomar o valor da carga de prova tão pequeno quanto possível.

Poderíamos pensar em definir  $E$ , 'rigorosamente', pelo  $\lim(F/q)$  quando  $q$  tende a zero. Entretanto, como vimos na Seq. 2.5, isso não seria possível, pois  $q$  não pode ser menor que a carga elementar  $e$ . Como estaremos lidando em geral com campos macroscópicos, produzidos por distribuições de cargas muitas ordens de grandeza maiores que  $e$ , isso não constituirá um problema.

Já vimos na Hidrodinâmica outro exemplo de um campo vetorial, o campo de velocidades no interior de um fluido em movimento. Vimos também como se pode visualizá-lo num dado instante, introduzindo no fluido partículas de corante e fotografando-as, com tempo de exposição suficientemente curto: o traço descrito por cada partícula de corante durante o tempo de exposição dá uma idéia do campo de velocidades no fluido.

No caso hidrodinâmico, o campo tem uma interpretação bastante concreta em termos do movimento de partículas do fluido. O que significa, porém, um campo elétrico no vácuo? Historicamente, houve inúmeras tentativas de interpretar o vácuo como análogo a um meio elástico (era chamado de "éter"), e o campo elétrico como uma modificação deste meio, análoga a uma tensão num meio elástico. Entretanto, tais tentativas fracassaram, conforme será discutido no vol. 4 deste curso.

Por que então introduzir um campo vetorial aparentemente abstrato no espaço vazio? Na eletrostática, isso parece apenas uma descrição alternativa mais complicada das interações entre cargas. Em lugar de tratá-las pela lei de Coulomb, decompos o processo em duas partes: a criação de um campo, num ponto do vácuo, por uma configuração de cargas, e a atuação deste campo sobre uma outra carga colocada neste ponto. A interação entre cargas passa a ser *mediada* pelo campo, mas o resultado é equivalente.

Suponhamos, porém, que a situação não seja mais estática: por exemplo, que uma das cargas comece a se mover em relação às outras. Que acontece com a interação?

A lei de Coulomb, como a lei da gravitação, parece sugerir a idéia de *ação à distância* entre partículas. Nesse caso, pensaríamos que os efeitos do movimento de uma das cargas seriam sentidos *instantaneamente* por todas as outras.

Entretanto, se concebermos a interação como sendo mediada pelo campo, que a transmite através do vácuo, o processo de transmissão pode ocorrer com velocidade finita, causando uma *retardação* nos efeitos do movimento da carga sobre as demais: elas só sentirão esses efeitos após um intervalo de tempo suficiente para a propagação, intervalo tanto maior quanto mais distantes estejam da carga que se moveu.

O próprio Newton considerava inadmissível a idéia da ação à distância. Referindo-se à gravitação, numa carta a Bentley escrita em 1693, ele disse:

"... que um corpo possa atuar sobre outro à distância através do vácuo, sem qualquer agente intermediário que possa transmitir esta ação de um ao outro, parece-me um absurdo tão grande, que não acredito que qualquer pessoa competente para raciocinar em termos de filosofia natural possa acreditar nisso."

Vemos portanto que diferenças entre o ponto de vista da ação à distância e o ponto de vista do campo deverão aparecer quando houver variações da distribuição de cargas com o tempo. As equações de Maxwell, que estudaremos no final do curso, levam a uma velocidade *finita* de propagação das interações eletromagnéticas no vácuo, que é a velocidade da luz.

Uma demonstração eloqüente dos efeitos da retardação pôde ser sentida durante os contatos entre os astronautas na Lua e a base terrestre. A transmissão dos sinais e a eletromagnética, levando a interações entre cargas e correntes da antena transmissora e da antena receptora. Quem acompanhou os contatos pela televisão percebia uma demora da ordem de 2 segundos entre perguntas da base e a recepção das respostas da Lua. A distância Terra-Lua é da ordem de 1 segundo-luz.

Vamos introduzir a descrição em termos de campo já na eletrostática, o que servirá como preparação para utilizá-la no tratamento de todos os fenômenos eletromagnéticos.

## 3.2 Cálculo do campo

Segundo a (3.1.2), o campo elétrico  $\mathbf{E}$  produzido por uma distribuição de cargas puntiformes  $q_1, q_2, \dots, q_N$  num ponto  $P$  é dado pela soma *vetorial*

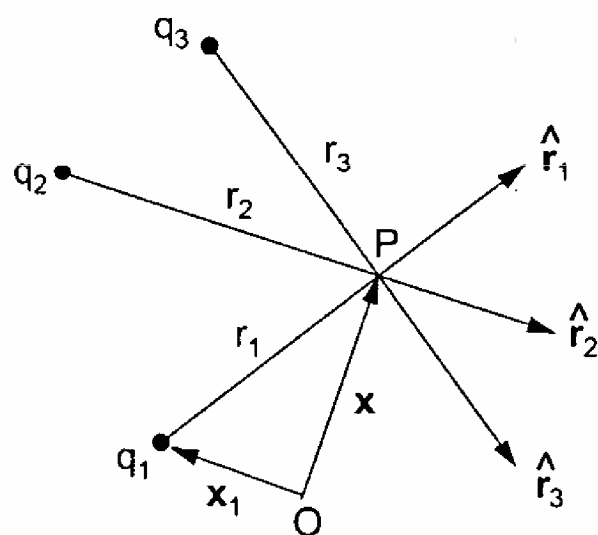


Figura 3.1 Campo de uma distribuição de cargas puntiformes num ponto  $P$ .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{(r_i)^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (3.2.1)$$

onde  $r_i$  é a distância da carga  $q_i$  ao ponto  $P$  e  $\hat{\mathbf{r}}_i$  é o vetor unitário da direção que liga a carga a este ponto, apontando (fig. 3.1) no sentido *da carga para*  $P$  (se  $q_i$  é negativo, o campo devido a  $q_i$  aponta em sentido oposto). Se tomarmos a origem das coordenadas num ponto  $O$ , sendo  $\mathbf{x}$  o

vetor de posição de P e  $\mathbf{x}_i$  o da carga  $q_i$ , teremos (fig.3.1), com,  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| = r_i$

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (3.2.2)$$

---

### Exemplo 1

Uma carga puntiforme  $-q$  está localizada no ponto  $(0,0, -d)$  de um sistema de coordenadas cartesianas, e outra  $+q$ , no ponto de coordenadas  $(0,0,d)$ . Qual é o campo num ponto  $(x,y,z)$ ?

Identificando  $q_1$  com a carga  $-q$  e  $q_2$  com a carga  $+q$ , e denotando por  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  os vetores unitários dos três eixos, vem

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z+d)\mathbf{k}, \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_2 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-d)\mathbf{k}$$

e as (3.2.1) e (3.2.2) dão

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right] (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \left[ \frac{(z-d)}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{(z+d)}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right] \mathbf{k} \right\}$$

Em particular, no plano  $z = 0$ , num ponto à distância  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  da origem, obtemos

$$\mathbf{E}(x,y,0) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

onde  $p \equiv 2qd$  chama-se *momento de dipolo elétrico* do par de cargas, conceito que voltaremos a discutir mais adiante. Esse resultado é equivalente ao obtido no Exemplo 1 da Seq. 2.4 (verifique!).

Por outro lado, num ponto  $(0,0,z)$ , com  $z > d$  (acima da carga positiva), resulta

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{pz}{2\pi\epsilon_0(z^2 - d^2)^2} \mathbf{k} \quad (z > d)$$

Qual é o valor do campo na origem? (cuidado com os sinais!)

---

Se tivermos uma distribuição contínua de cargas, a somatória (3.2.1) é substituída por uma integral:

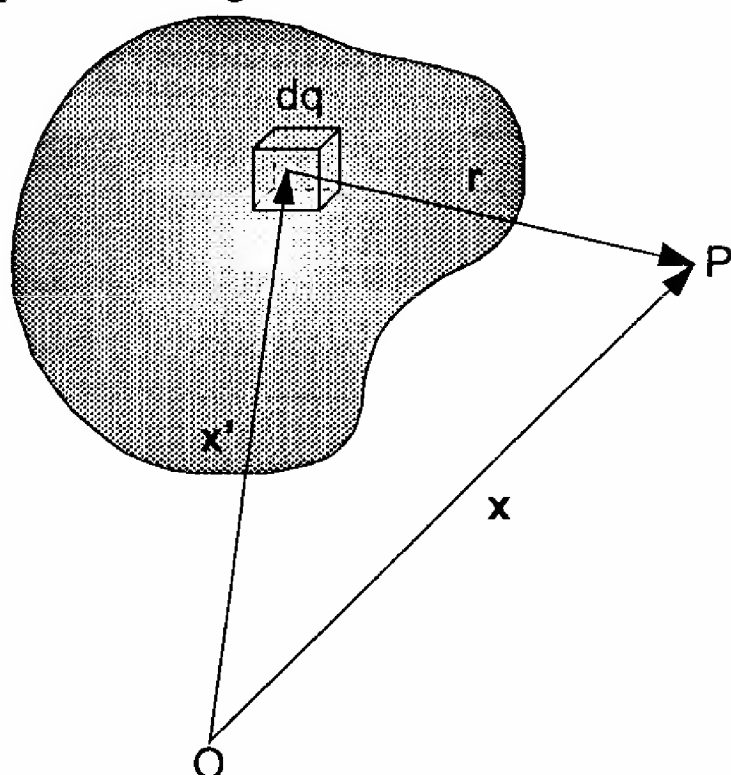


Figura 3.3 Campo de uma distribuição contínua de cargas num ponto P

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}}{r^3} dq \quad (3.2.3)$$

onde [cf.(3.2.2)]

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r \equiv |\mathbf{r}| \quad (3.2.4)$$

e  $\mathbf{x}$  é o vetor de posição do ponto P onde se calcula o campo,  $\mathbf{x}'$  o vetor de posição do elemento de carga  $dq$  cuja contribuição se está calculando (fig. 3.3). As variáveis de integração são as coordenadas de  $\mathbf{x}'$ .

Se a distribuição de carga é tridimensional, temos  $dq = \rho dv$ , onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga e  $dv$  o elemento de volume; se é uma distribuição superficial ou linear, empregamos as (2.4.3) ou (2.4.4), respectivamente.

### Exemplo 2

Um disco circular horizontal de raio  $a$  está uniformemente carregado com densidade superficial de carga  $\sigma$ . Qual é o campo num ponto do eixo vertical que atravessa o disco em seu centro, a uma distância  $D$  do centro?

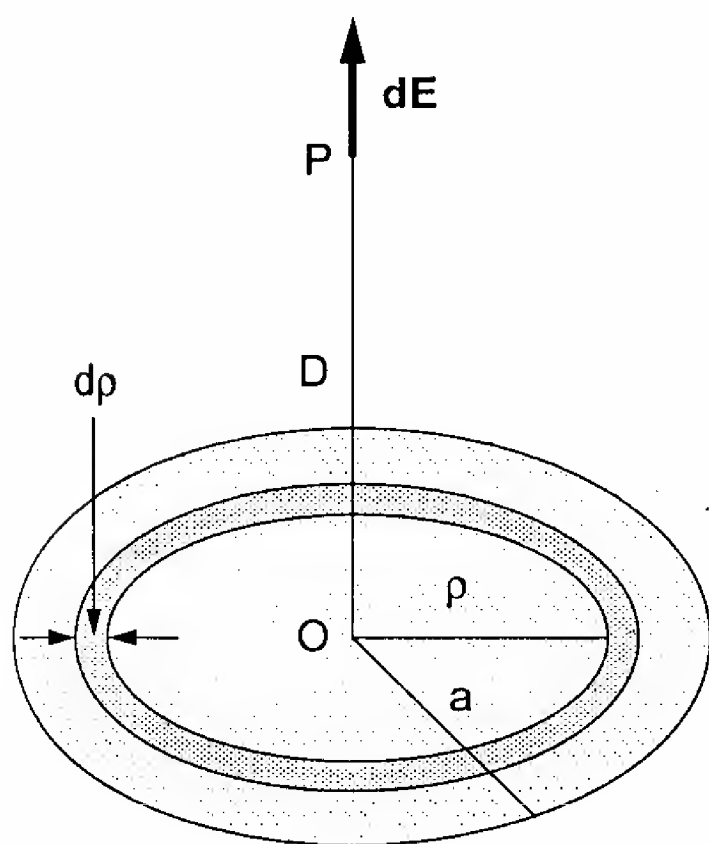


Figura 3.4 Campo de um disco circular

Conforme ilustra a fig. 3.4, podemos pensar no disco como subdividido em anéis de largura infinitesimal  $dp$  e raio  $\rho$  variando de 0 a  $a$ . A carga de um anel é  $2\pi\sigma\rho dp$  e o campo  $d\mathbf{E}$  que ele cria no ponto P é dado pelo resultado do Exemplo 2 da Seç. 2.4, ou seja, é vertical e de magnitude

$$|d\mathbf{E}| = \frac{2\pi\rho dp \sigma D}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + D^2)^{3/2}} = \frac{\sigma D \rho dp}{2\epsilon_0(\rho^2 + D^2)^{3/2}}$$

Como todas as contribuições têm a mesma direção, basta integrar essa expressão em relação a  $\rho$  desde 0 até  $a$  para obter o resultado final:



$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma D}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} = -\frac{\sigma D}{2\epsilon_0} \left(\rho^2 + D^2\right)^{-1/2} \Big|_0^a = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{D}{\left(a^2 + D^2\right)^{1/2}} \right]$$

O campo é vertical e aponta em direção ao disco se  $\sigma$  é negativo, em sentido oposto se  $\sigma$  é positivo (como foi suposto acima e na fig. 2.4).

O exemplo 2 permite obter, como caso limite, um resultado importante. Se fizermos  $a$  tender a  $\infty$ , obtemos o *campo elétrico produzido por um plano infinito uniformemente carregado com densidade superficial de carga  $\sigma$* :

$$|\mathbf{E}| = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} \quad (3.2.5)$$

O campo é perpendicular ao plano e aponta em direção a ele se  $\sigma < 0$ , e em sentido oposto para  $\sigma > 0$ . Temos portanto

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (+ \text{ para } z > 0, - \text{ para } z < 0) \quad (3.2.6)$$

onde  $\hat{\mathbf{z}}$  é o vetor unitário do eixo  $z$ , tomado perpendicular ao plano.

O resultado obtido no Exemplo 2 já se reduz à (3.26), com muito boa aproximação, desde que seja  $D \ll a$  (verifique!). Logo, se P, o *ponto de observação do campo*, está a uma distância das bordas muito maior do que a distância ao disco, o campo detectado em P é praticamente o mesmo que seria produzido por um plano infinito uniformemente carregado. É nesse sentido que devemos pensar em limites como  $a \rightarrow \infty$ .

Vemos também pela (3.2.6) que, ao atravessar o plano, o campo elétrico sofre uma descontinuidade, cuja magnitude é  $\sigma / \epsilon_0$ . Isso resulta de termos idealizado a camada plana de carga como tendo espessura zero. Para uma camada de espessura finita homogeneamente carregada, o campo variaria continuamente entre os valores extremos dentro da camada.

### 3.3 Linhas de força

Sabemos que existe um campo elétrico numa região do espaço quando uma carga de prova colocada nesse ponto detecta a existência de uma força. Será possível visualizar de forma mais concreta o campo elétrico?

Para o campo magnético de um ímã permanente, que discutiremos mais tarde, é familiar como torná-lo visível usando limalha de ferro, que tende a alinhar-se na direção do campo em cada ponto, concentrando-se também mais nas regiões onde o campo é mais intenso. As curvas ao longo das quais a limalha se alinha são *linhas de força* do campo.

Uma linha de força é definida como uma *curva tangente em cada ponto à direção do campo neste ponto*. Assim, dada uma linha de força, podemos determinar imediatamente

a *direção* do campo em cada um dos seus pontos, bastando traçar a tangente à curva, e podemos também obter o *sentido* do campo, indicando uma orientação sobre cada linha.

Assim, por exemplo, para uma carga puntiforme, o campo elétrico tem a direção radial, apontando para fora se a carga é positiva e para dentro se é negativa. O aspecto das linhas de força correspondentes está indicado na fig. 3.5. Em ambos os casos, não se deve esquecer que o campo é tridimensional, tendo simetria de revolução em torno de qualquer eixo que passa pela carga.

No Exemplo 1 da seção anterior, em que se têm duas cargas puntiformes opostas, vimos que o campo no plano  $z = 0$  é vertical. Na vizinhança imediata de cada uma das cargas, o campo deve ser dominado por essa carga e as linhas de força devem assemelhar-se às da fig. 3.5 (a) ou (b), o que dá uma idéia qualitativa do aspecto dessas linhas, que estão representadas na fig. 3.6.

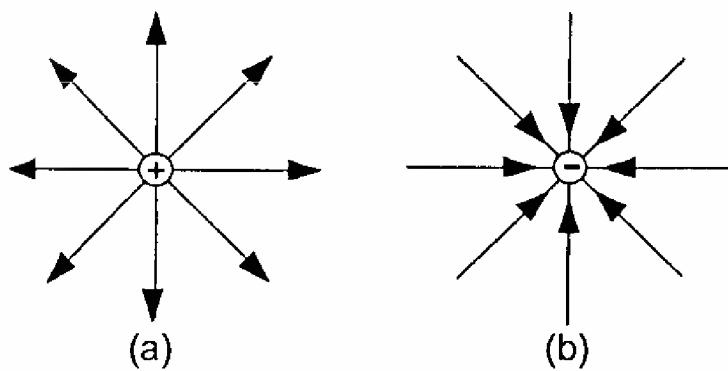


Figura 3.5 Linhas de força para uma carga puntiforme (a) positiva; (b) negativa

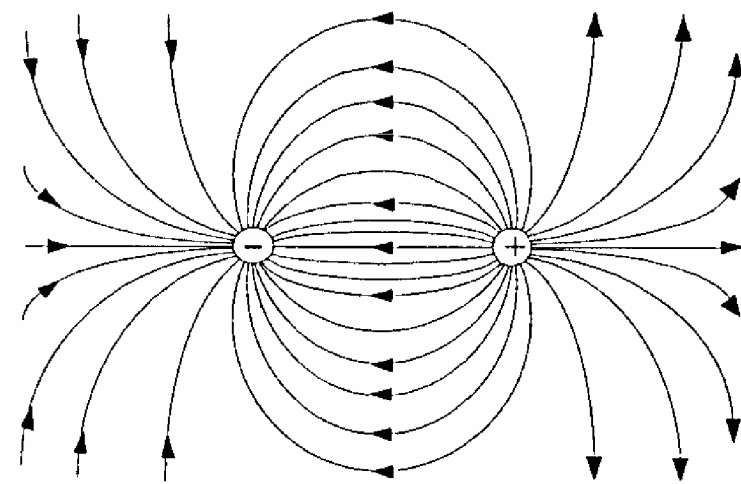


Figura 3.6 Linhas de força para um par de cargas puntiformes iguais e opostas

Nesse caso, existe simetria axial em torno do eixo  $z$ , de forma que devemos imaginar o resultado da rotação dessa figura em torno do eixo que liga as duas cargas.

Para um plano uniformemente carregado, com o campo dado pela (3.2.6), o aspecto das linhas de força está representado na fig. 3.7. O campo é *uniforme* acima e

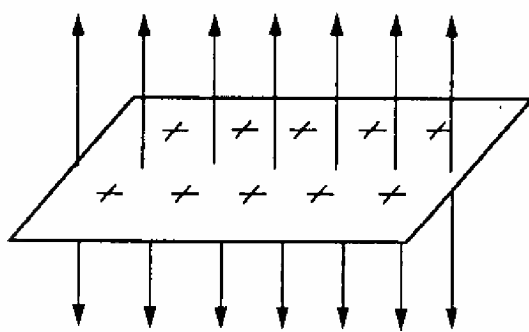


Figura 3.7 Linhas de força para plano uniformemente carregado

abaixo do plano (linhas de força paralelas e igualmente espaçadas), mas tem sentidos opostos nos dois semi-espacos, com uma descontinuidade ao atravessar o plano, no qual nascem todas as linhas de força, a partir das cargas.

É muito importante reconhecer os *elementos de simetria* de um problema, pois

isto permite prever a simetria das linhas de força. Na fig. 3.7, temos *simetria plana*, e as linhas de força têm de ser perpendiculares ao plano. Na fig. 3.5, há *simetria esférica*, e as linhas de força têm de ser radiais.

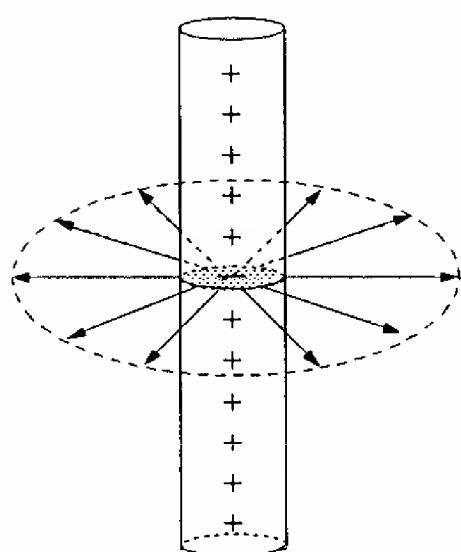


Figura 3.8 Fio cilíndrico uniformemente carregado

Para um *fio cilíndrico infinito uniformemente carregado* (fig. 3.8), temos *simetria axial* (cilíndrica), e as linhas de força são radiais em planos perpendiculares ao fio, ou seja, têm a direção do vetor unitário  $\hat{\rho}$  em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ .

Embora ajude a visualizar o campo, a representação por linhas de força tem limitações: dá a direção e o sentido do campo em cada ponto, mas não a sua

magnitude. Entretanto, é possível dar uma idéia também da magnitude convencionando-se que ela é inversamente proporcional ao *espaçamento* das linhas de força, o que foi feito nos exemplos acima.

Duas linhas de força não podem se cruzar, porque a direção do campo  $\mathbf{E}$  (suposto  $\neq 0$ ) num ponto de intersecção deixaria de ser única. Linhas de força *não são* trajetórias de partículas carregadas soltas em repouso no campo: dão só, neste caso, a direção inicial do movimento. Para partículas já em movimento, a direção da força num ponto da trajetória não coincide, em geral, com a direção da trajetória.

### 3.4 Fluxo e lei de Gauss

Vimos no curso de hidrodinâmica o conceito de *fluxo* ou *vazão* de um fluido através de uma superfície. No entorno de um ponto do fluido onde a velocidade é  $\mathbf{v}$ , o

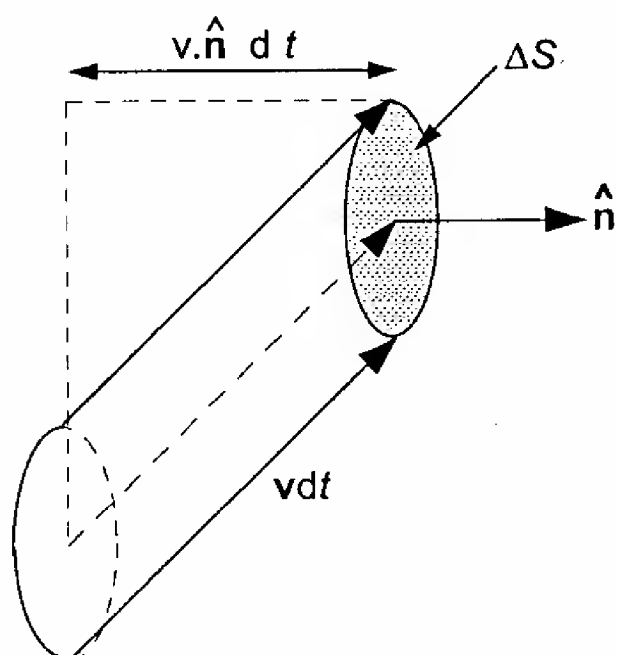


Figura 3.9 Volume de fluido que atravessa  $\Delta S$  durante  $dt$

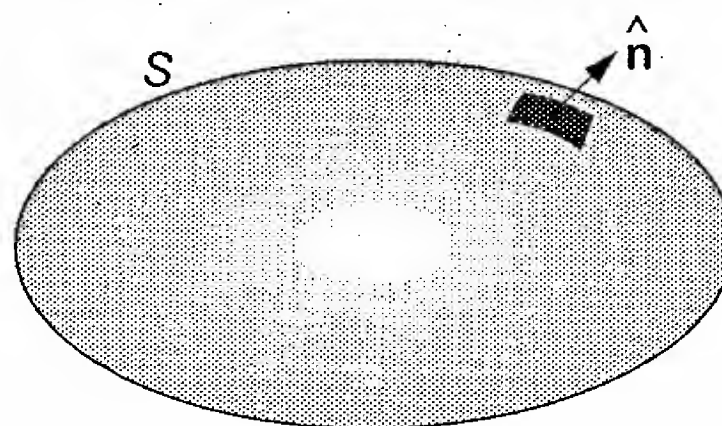


Figura 3.10 Superfície fechada  $S$  com normal externa  $\hat{\mathbf{n}}$

volume de fluido que atravessa um elemento de superfície  $\Delta S$  (cuja normal tem a direção  $\hat{\mathbf{n}}$ ) durante um intervalo de tempo  $dt$  é o volume  $dv$  (fig. 3.9) contido num cilindro de base  $\Delta S$  e geratriz  $\mathbf{v} dt$  (altura  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dt$ ), ou seja:

$$dv = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dt) \Delta S$$

O volume de fluido por unidade de tempo que se escoia através de  $\Delta S$  (*fluxo*, *vazão*) é então

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S$$

Em particular, se o fluido é incompressível, e se  $S$  é uma superfície fechada dentro da qual não há *fontes* nem *sorvedouros* de fluido, e  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor da normal externa a  $S$  (fig. 3.10),

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (3.4.1)$$

onde  $\oint_S$  significa integral estendida a toda a superfície fechada  $S$ . Isso equivale a dizer que o volume de fluido que sai através de  $S$  é igual ao que entra.

Por analogia com a hidrodinâmica, chama-se *fluxo* do campo elétrico através de um elemento de superfície  $\Delta S$  (cujo versor da normal é  $\hat{\mathbf{n}}$ ) a grandeza  $\Delta\Phi$  definida por

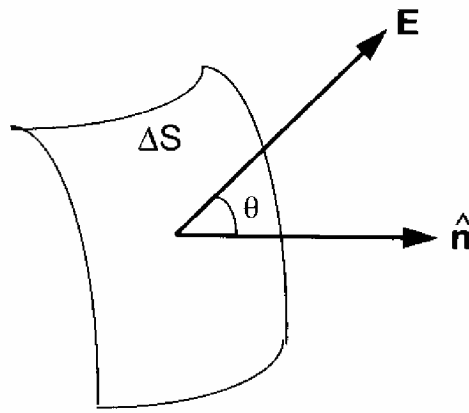


Figura 3.11 Fluxo através de  $\Delta S$

$$\Delta\Phi \equiv \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S = |\mathbf{E}| \cos \theta \Delta S \quad (3.4.2)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{E}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  (fig. 3.11).

Deve-se notar que:

- (i) o elemento de superfície é *orientado*, ou seja, sua normal  $\hat{\mathbf{n}}$  tem um sentido preferencial.
- (ii)  $\Delta\Phi$  é  $> 0$  ou  $< 0$  conforme  $\theta$  seja agudo ou obtuso. Assim, na (3.4.1), contribuições positivas e negativas se cancelam.
- (iii) A unidade de fluxo é  $1 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}$ .

### Fluxo devido a uma carga puntiforme

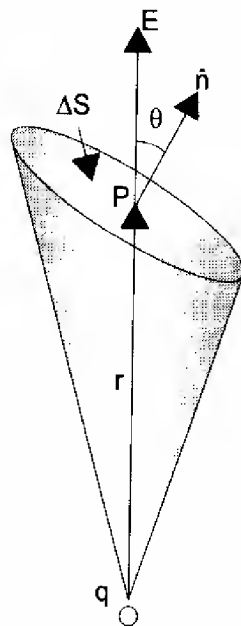


Figura 3.12 Fluxo devido a  $q$

Para uma carga  $q$  puntiforme situada num ponto  $O$ , o campo  $\mathbf{E}$  num ponto  $P$  de um elemento de superfície  $\Delta S$  é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (3.4.3)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / r$  é o versor de  $\mathbf{OP}$  (fig. 3.12). O fluxo através de  $\Delta S$  é então dado por

$$\Delta\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2} \quad (3.4.4)$$

onde  $\cos \theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

### Digressão sobre ângulo sólido

A expressão que aparece na (3.4.4)

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2} \quad (3.4.5)$$

é o que se chama um *elemento de ângulo sólido*. Trata-se de uma extensão do conceito de ângulo plano expresso em radianos, cujas propriedades vamos discutir agora.

Num plano, o ângulo  $\Delta\phi$  (em radianos) subtendido por um elemento de arco orientado  $\Delta l$  em relação a um ponto O, situado à distância  $r$  de  $\Delta l$ , é o mesmo que aquele associado ao arco de círculo  $\Delta s$  com centro em O, de raio  $r$ , compreendido entre as mesmas direções (fig. 3.13), ou seja,

$$\Delta\phi = \Delta s / r = \Delta l \cos \theta / r \quad (3.4.6)$$

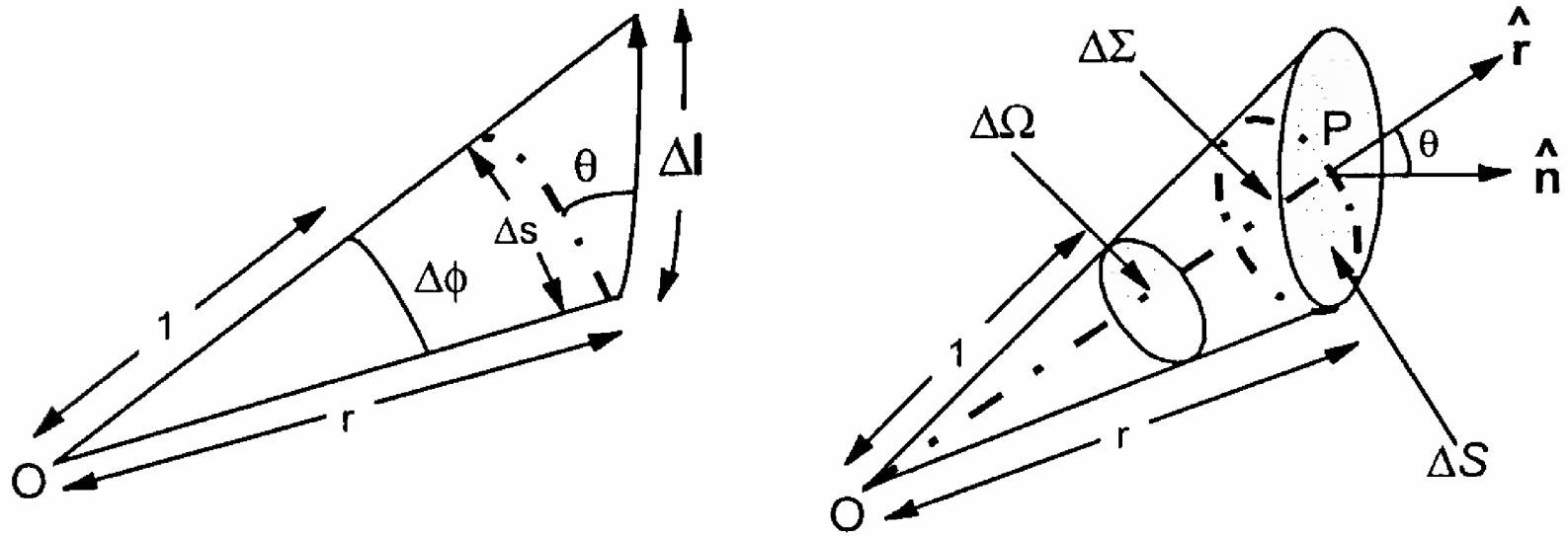


Figura 3.13 Comparação entre um ângulo plano  $\Delta\phi$  (radianos) e um ângulo sólido  $\Delta\Omega$  (esterradianos).

que pode ser positivo ou negativo, conforme a orientação do arco. Note-se que  $\Delta\phi$  é o arco de um círculo de raio *unitário* compreendido entre essas direções:  $\Delta s$  é proporcional a  $r$ .

Analogamente, no espaço, o *ângulo sólido*  $\Delta\Omega$  subtendido por um elemento de superfície orientado  $\Delta S$ , com normal  $\hat{n}$ , em relação a um ponto O, situado à distância  $r$  de  $\Delta S$ , é o mesmo que para  $\Delta\Sigma$ , área correspondente da *esfera* de raio  $r$  compreendida dentro do mesmo cone de direções (fig. 3.13). Temos

$$\Delta\Sigma = \Delta S \cos \theta = \Delta S (\hat{n} \cdot \hat{r}) \quad (3.4.7)$$

onde  $\hat{n}$  e  $\hat{r}$  são as normais a  $\Delta S$  e  $\Delta\Sigma$ , respectivamente, que crescem como  $r^2$ . Definimos assim

$$\Delta\Omega \equiv \Delta\Sigma / r^2 = \Delta S \cos \theta / r^2 \quad (3.4.8)$$

que se mede em *esterradianos*, e pode ser positivo ou negativo conforme  $\theta$  seja agudo ou obtuso (o sinal muda com a orientação de  $\hat{n}$ ). Note-se que  $|\Delta\Omega|$  é também a área de uma esfera *unitária* compreendida dentro do mesmo cone.

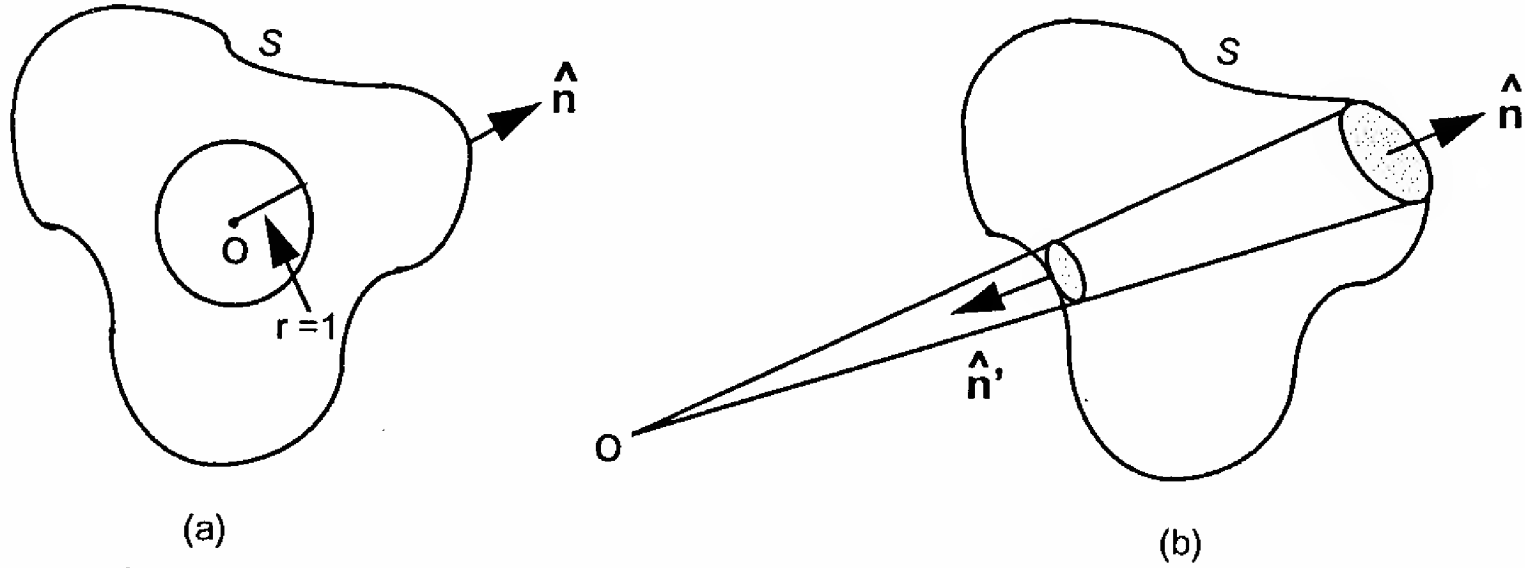


Figura 3.14 Ângulo sólido subtendido por uma superfície fechada  $S$  vista de um ponto  $O$ : (a) interno; (b) externo

Seja  $S$  uma superfície *fechada*, orientada em cada ponto (segundo a normal *externa*  $\hat{n}$ ).

Temos então, se  $O$  é um ponto *interno* a  $S$  [fig. 3.14 (a)], e  $\oint_S$  representa a integral sobre a superfície  $S$  fechada,

$$\Omega = \oint_S d\Omega = 4\pi \quad (\text{O interno}) \quad (3.4.9)$$

pois esta é a área de uma superfície esférica de raio  $r = 1$ .

Por outro lado, se  $O$  é um ponto *externo* a  $S$  [fig. 3.14 (b)],

$$\oint_S d\Omega = 0 \quad (\text{O externo}) \quad (3.4.10)$$

pois neste caso há duas intersecções e elementos correspondentes delas dão contribuições de mesmo módulo e sinais contrários ( $\hat{n}' = -\hat{n}$ ).

Esses resultados sobre pontos internos e externos continuam valendo quando há mais de duas intersecções, como mostra a fig. 3.15 (contribuições adicionais em número par se cancelam).

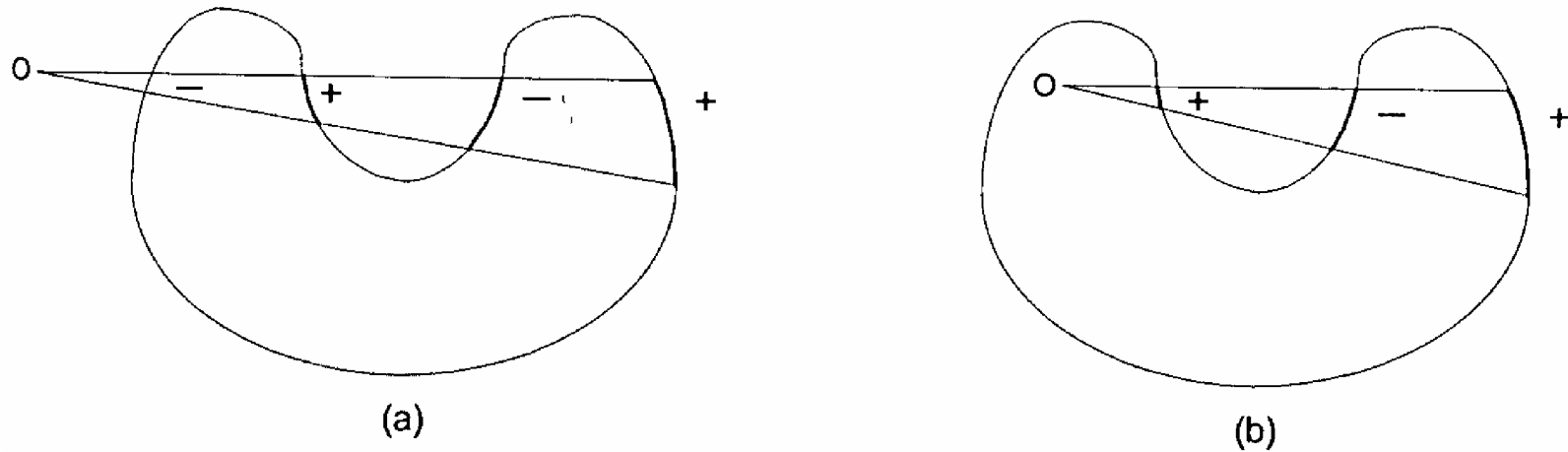
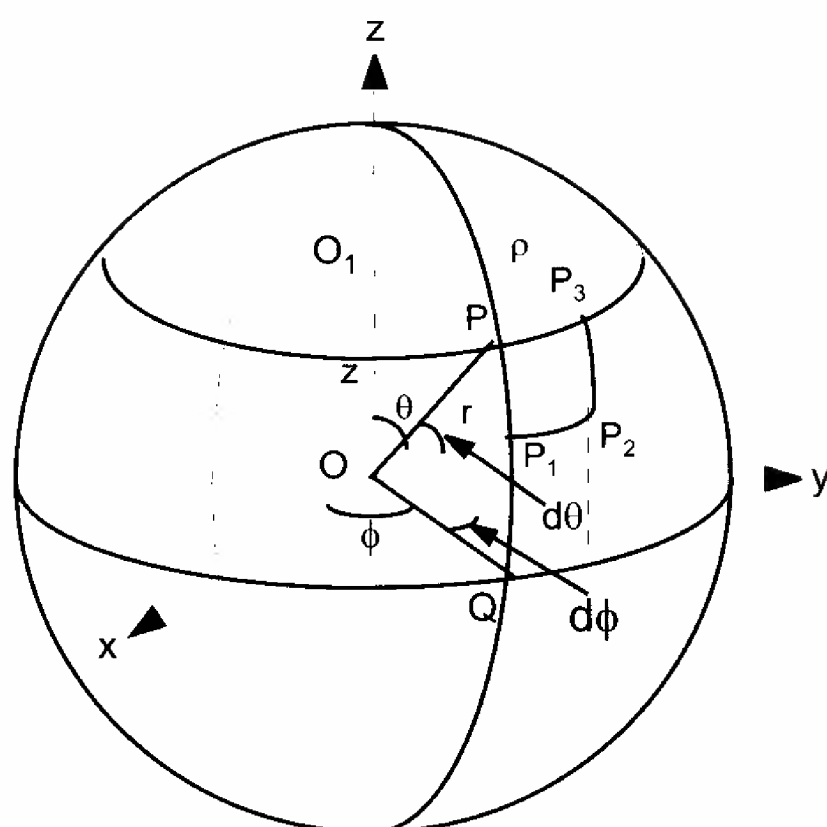


Figura 3.15 (a) Número par de intersecções,  $\Omega = 0$ ; (b) Número ímpar de intersecções,  $\Omega = 4\pi$



O elemento de área  $dS$  sobre uma esfera de raio  $r$ , em coordenadas esféricas (fig. 3.16), é o produto dos arcos

$$\widehat{PP_1} (= r d\theta) \times \widehat{P_1P_2} (= r \sin \theta d\phi)$$

o que dá

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

e

$$d\Omega \equiv dS / r^2 = \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.4.11)$$

Figura 3.16 Elemento de área em coordenadas esféricas

Essa expressão é importante em grande número de aplicações. Vamos usá-la, a título de exemplo, para calcular o ângulo sólido subtendido pelo círculo equatorial da esfera da fig. 3.16 com centro em  $O_1$ , de raio  $\rho$ , à distância  $OO_1 = z$  do centro  $O$ . Para isso, basta integrar a expressão (3.4.11) sobre o domínio de variação das coordenadas esféricas ao longo desse círculo:

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = 2\pi \left[ -\cos \theta' \right]_0^\theta$$

o que dá

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta) \quad (3.4.12)$$

ou seja, usando o triângulo  $OO_1P$  da fig 3.16,

$$\Omega = 2\pi \left[ 1 - \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (3.4.13)$$

Comparando essa expressão com o resultado obtido no Ex. 2, Seção 3.2, vemos que aquele resultado (com  $D \parallel \rho$  e  $a \parallel z$ ) corresponde a ( $\Omega$  = ângulo sólido subtendido pelo disco em  $P$ )

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.4.14)$$

A razão é simples. Na contribuição para o campo de um anel de largura infinitésima (figs. 3.4, 2.5), basta considerar, por simetria, a componente perpendicular, dada por (fig. 2.5)

$$|d\mathbf{E}_\perp| = |d\mathbf{E}| \cos \theta = \frac{\sigma dS \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Em particular, para um plano infinito, tem-se  $\Omega = 2\pi$  acima do plano,  $\Omega = -2\pi$  abaixo dele, o que leva à (3.2.6).

Terminada essa digressão sobre o conceito de ângulo sólido, voltemos à expressão (3.4.4) para o fluxo do campo de uma carga  $q$  puntiforme através de um elemento de superfície  $dS$  orientado com normal  $\hat{n}$ . Vemos pela (3.4.4) que esse fluxo é

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (3.4.15)$$

onde  $d\Omega$  é o ângulo sólido subtendido por  $dS$ , visto da posição da carga. O fluxo  $\Phi_S$  através de uma superfície  $S$  fechada de normal externa  $\hat{n}$  é então, pelas (3.4.9) e (3.4.10),

$$\Phi_S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \text{se } q \text{ está dentro de } S \\ 0 & \text{se } q \text{ está fora de } S \end{cases} \quad (3.4.16)$$

Todos esses resultados valem para o campo de uma carga  $q$  puntiforme.

Como qualquer distribuição de cargas pode ser decomposta em elementos de carga assimiláveis a cargas puntiformes, e o campo resultante, pelo princípio de superposição, é a soma dos campos de todos esses elementos, resulta então a *lei de Gauss*:

$$\Phi_S \equiv \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0 \quad (3.4.17)$$

onde

$$d\mathbf{S} \equiv \hat{n} dS \quad (3.4.18)$$

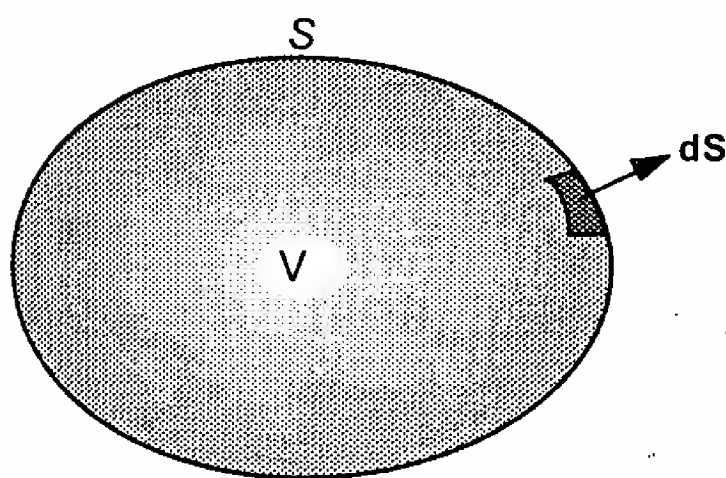


Figura 3.17 Superfície fechada  $S$ , com volume  $V$  interno e elemento de superfície orientado  $d\mathbf{S}$

é o elemento de superfície orientado associado à normal externa  $\hat{n}$  à superfície fechada  $S$ , e  $Q$  é a carga total contida dentro do volume  $V$  interno à superfície  $S$  (fig. 3.17). Daqui por diante, adotaremos sempre a abreviação (3.4.18).

Vemos assim que é possível detectar a presença de carga dentro de uma superfície fechada pelo *fluxo* do campo elétrico através desta superfície, da mesma

forma que se pode detectar a presença de fontes (ou sorvedouros) de fluido dentro de uma superfície fechada medindo a *vazão total* do fluido através dela.

Dizemos assim que *as cargas são as fontes do campo eletrostático*.

### 3.5 Aplicações da lei de Gauss

A lei de Gauss permite simplificar grandemente o cálculo do campo eletrostático de uma distribuição de cargas. Para isso, entretanto, é essencial que a distribuição tenha



*elementos de simetria* (plana, axial, esférica...), de tal forma que se possa exprimir o fluxo total através de uma *superfície gaussiana* fechada, judiciosamente escolhida para aproveitar a simetria, em termos da magnitude do campo, a mesma em qualquer ponto desta superfície. Vejamos exemplos disso.

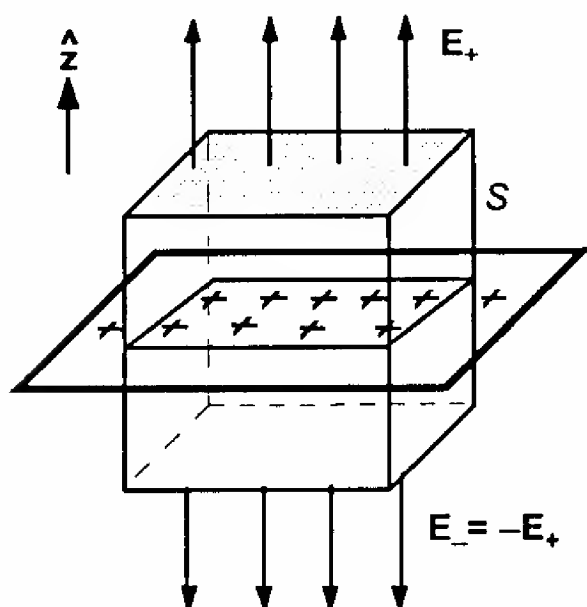


Figura 3.18 Superfície gaussiana S para um plano uniformemente carregado

### Plano uniformemente carregado

Neste caso, temos simetria em relação ao plano, e já vimos (Seç. 3.3) que o campo é uniforme acima e abaixo do plano, mas com sentidos opostos (Fig. 3.18):

$$\mathbf{E}_+ = E_+ \hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{E}_-$$

Tomando para superfície gaussiana o paralelepípedo da figura, com bases de área A, só há fluxo através das bases, e vem

$$\Phi_S = 2E_+ A = Q / \epsilon_0 = \sigma A / \epsilon_0$$

onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga, o que dá

$$\mathbf{E}_\pm = \pm \sigma / (2\epsilon_0) \hat{\mathbf{z}} \quad (3.5.1)$$

o mesmo resultado da (3.2.6).

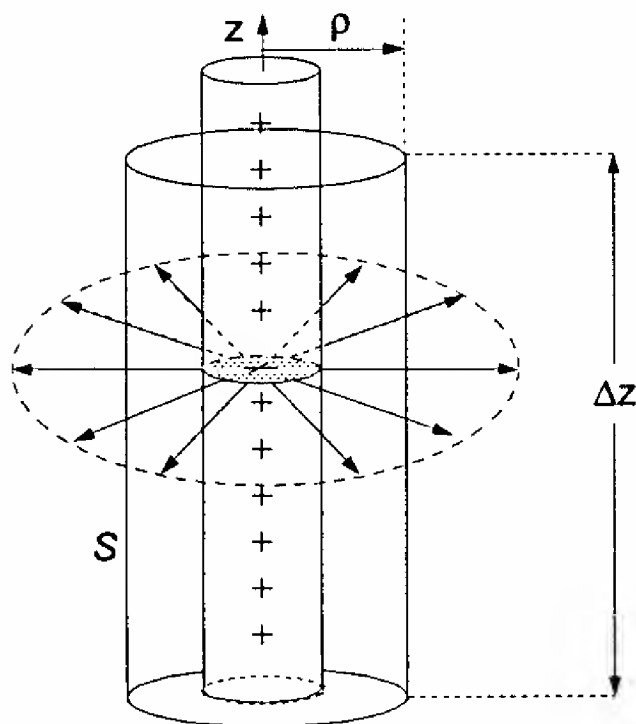


Figura 3.19 Superfície gaussiana S cilíndrica

### Fio cilíndrico, carga uniforme

Vimos na Seç. 3.3 que, em coordenadas cilíndricas ( $\rho, \phi, z$ ), o campo deve ter a direção  $\hat{\rho}$  e, pela simetria axial, deve ser independente de  $\phi$  e de  $z$ , o que dá

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho) \hat{\rho} \quad (3.5.2)$$

O campo mais geral teria três componentes, cada uma delas dependente de ( $\rho, \phi, z$ ), de modo que a simetria leva a uma grande simplificação.

A superfície gaussiana adaptada à simetria é aqui um cilindro coaxial de raio  $\rho$  e altura  $\Delta z$  (fig. 3.19), que contém

em seu interior a carga  $\lambda \Delta z$ , onde  $\lambda$  é a densidade linear de carga sobre o fio. Só existe fluxo através da superfície lateral, de forma que a lei de Gauss dá:

$$\Phi_S = 2\pi \rho \Delta z E_\rho(\rho) = \lambda \Delta z / \epsilon_0$$

ou seja

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho} \quad (3.5.3)$$

que cai mais lentamente com a distância (só com a primeira potência, em lugar do quadrado). Isso se deve a termos nesse caso uma distribuição de cargas que se estende até o infinito (fio infinito).

### *Camada esférica, carga uniforme*

Consideremos uma camada esférica de raio  $a$  e espessura infinitésima  $\Delta r$  (fig. 3.20), com densidade de carga  $\rho$  e carga total

$$\Delta Q = 4\pi a^2 \Delta r \rho$$

Por simetria o campo é radial e só depende da coordenada esférica  $r$ , ou seja,

$$\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (3.5.4)$$

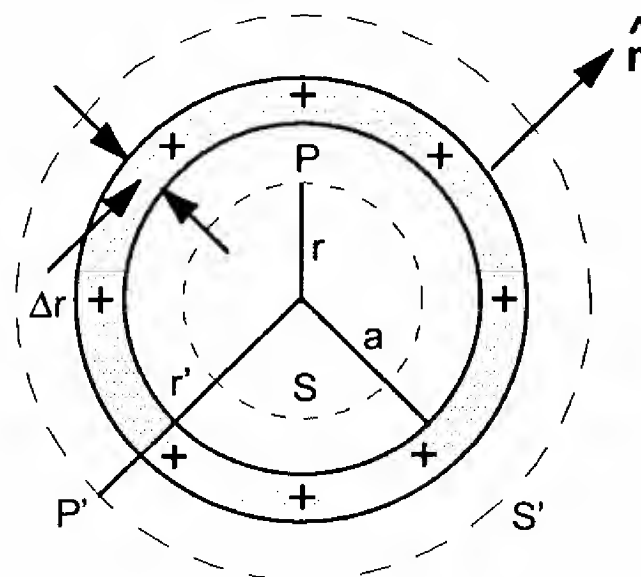


Figura 3.20 Camada esférica de carga e superfícies gaussianas  $S$  e  $S'$

onde  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário radial. Para calcular o campo num ponto  $P$  interno à camada, tomamos uma superfície gaussiana esférica concêntrica  $S$  passando por  $P$  (fig. 3.20).

Como não há cargas dentro de  $S$ , a lei de Gauss dá

$$\mathbf{E}(r) = 0 \quad (r < a) \quad (3.5.5)$$

Por outro lado, para um ponto  $P'$  externo, a superfície gaussiana é uma esfera concêntrica  $S'$  que passa por  $P'$  e contém toda a carga  $\Delta Q$  da camada, de forma que a lei de Gauss dá

$$\Phi_S = 4\pi r^2 E_r(r) = \Delta Q / \epsilon_0 = 4\pi a^2 \rho \Delta r / \epsilon_0$$

ou seja

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \Delta r \hat{\mathbf{r}} \quad (3.5.6)$$

Assim, o campo externo à camada é o mesmo que se toda a carga da esfera estivesse concentrada no seu centro.

Esses resultados, mostrando que uma camada esférica uniforme não produz campo em seu interior, e que atua em pontos externos como se sua carga estivesse toda concentrada em seu centro, são inteiramente análogos aos obtidos por Newton para o campo gravitacional (Fís. Bás. 1, Seç. 10.9)

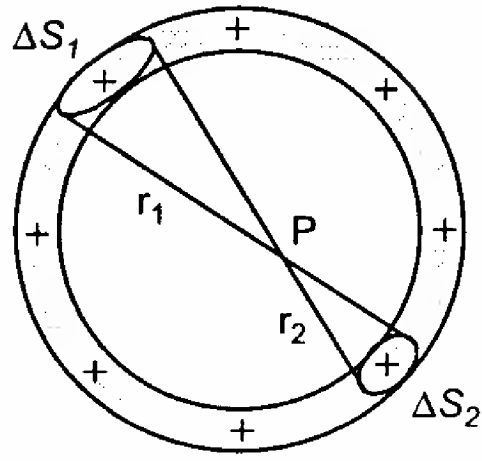


Figura 3.21 Cancelamento entre as contribuições de  $\Delta S_1$  e  $\Delta S_2$

Por que o campo é nulo dentro da camada? Um elemento de superfície  $\Delta S_1$ , da camada à distância  $r_1$  do ponto interno P (fig. 3.21) contém uma carga  $\rho \Delta S_1 \Delta r$  e gera em P um campo de magnitude

$$\Delta E_1 = \frac{\rho \Delta r}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta S_1}{(r_1)^2} = \frac{\rho \Delta r}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega$$

onde  $\Delta\Omega$  é o ângulo sólido subtendido por  $\Delta S_1$  em P.

O ângulo sólido "oposto pelo vértice" corta a camada segundo  $\Delta S_2$ , que dá uma contribuição de sentido oposto (fig. 3.21) e magnitude

$$\Delta E_2 = \frac{\rho \Delta r}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta S_2}{(r_2)^2} = \frac{\rho \Delta r}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega = \Delta E_1$$

Essas duas contribuições são portanto iguais e opostas, o que explica o cancelamento. Deve ser notado, porém, que esse resultado depende crucialmente do fato de que a lei de forças é como a da gravitação, com proporcionalidade inversa ao quadrado da distância. Se em lugar disso se tivesse uma lei do tipo  $r^{-n}$  com  $n \neq 2$ , os campos não seriam proporcionais aos ângulos sólidos, e o cancelamento deixaria de ocorrer.

Como qualquer distribuição de carga esfericamente simétrica pode ser imaginada como resultado da superposição de camadas esféricas de espessuras infinitésimas, podemos agora aplicar os resultados acima a uma tal distribuição,

$$\rho = \rho(r) \quad (3.5.7)$$

para a qual, por simetria, o campo será da forma (3.5.4). Num ponto à distância  $r$  do centro, uma camada interna entre  $r'$  e  $r' + dr'$ , com  $r' < r$ , dará uma contribuição do tipo (3.5.6), ou seja,

$$dE_r(r) = \frac{\rho(r')}{\epsilon_0} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 dr'$$

ao passo que as camadas externas ( $r' > r$ ) não contribuem. Logo,

$$E_r(r) = \int_0^r dE_r(r') = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (3.5.8)$$

o mesmo resultado que se teria se toda a carga até a distância  $r$  estivesse concentrada no centro.

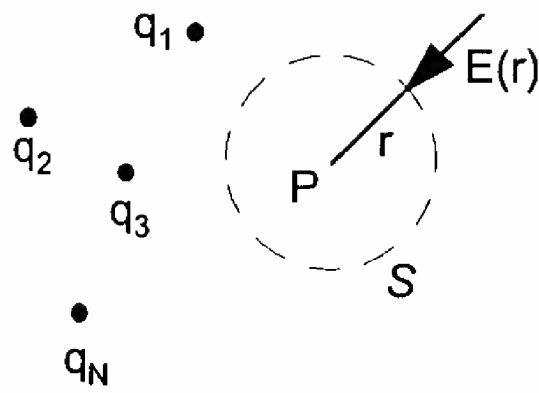


Figura 3.22 Teorema de Earnshaw

### O teorema de Earnshaw

Um conjunto de cargas puntiformes  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , em posições fixas, criam um campo eletrostático no vácuo. Seja  $P$  um ponto qualquer, não ocupado por nenhuma dessas cargas (fig 3.22). Se colocarmos em  $P$  outra carga puntiforme  $q$ , poderá ela permanecer em equilíbrio estável nesta posição sob a ação do campo

criado pelas demais cargas? O *teorema de Earnshaw* diz que isso não acontece.

Para demonstrá-lo, consideremos as condições para o equilíbrio estável de  $q$ : (i) a força  $q\mathbf{E}(P)$  sobre  $q$  em  $P$  deve anular-se, ou seja,  $\mathbf{E}(P) = 0$ ; (ii) (*estabilidade* do equilíbrio) para *qualquer* pequeno deslocamento  $\mathbf{r}$  da carga a partir de  $P$ , a força correspondente deve ser *restauradora*, ou seja,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  deve apontar de volta para  $P$ . Logo, imaginando uma pequena superfície gaussiana  $S$  esférica de raio  $r$  com centro em  $P$  (fig. 3.22), a componente normal do campo  $E_r(r)$  deve ser  $< 0$ , o que dá, para o fluxo  $\Phi_S(r)$  sobre  $S$ ,

$$\Phi_S(r) < 0$$

por menor que seja  $r$ .

Mas isso, pela lei de Gauss, implicaria a existência de carga negativa em  $P$ , contra a hipótese de que  $P$  é um ponto do vácuo, situado fora da distribuição de cargas puntiformes dada. Isso demonstra o teorema de Earnshaw.

Uma das consequências desse resultado é que não pode ser construído um modelo clássico estável de um átomo com base numa distribuição de cargas fixa (estática). Veremos mais tarde que isso permanece válido para um modelo dinâmico, como o do átomo de Bohr, em que elétrons descrevem órbitas em torno de um núcleo atômico carregado positivamente. Nesse caso, a instabilidade, dentro da física clássica, resultaria da emissão de radiação.

### Campo elétrico na superfície de um condutor

Vimos na Seq. 2.2 que uma carga pode deslocar-se livremente no interior de um meio condutor. Logo, numa situação de equilíbrio eletrostático, não pode haver cargas (ou seja,  $\rho = 0$ ) nem campo elétrico (tem de ser  $\mathbf{E} = 0$ ) *dentro* de um condutor, pois as cargas se deslocariam sob a ação do campo, rompendo o equilíbrio estático:

$$\rho(P) = 0 = \mathbf{E}(P), \text{ para } P \text{ no interior de um meio condutor (na eletrostática)} \quad (3.5.9)$$

A relaxação para o equilíbrio de uma distribuição de cargas inicialmente colocada dentro de um meio condutor é um processo extremamente rápido: tipicamente, para um

corpo condutor macroscópico, leva apenas uma fração de segundo. Sabemos, por outro lado, que é possível comunicar carga a um condutor isolado. Onde então ela irá localizar-se? Só pode ser na *superfície* do corpo: com efeito, um ponto da fronteira é diferente de um ponto situado no interior do meio, pois separa dois meios diferentes, estando em contato com um isolante — o suporte do condutor ou a atmosfera.

Na descrição macroscópica, aparece portanto na superfície de um condutor carregado uma *densidade superficial de carga*  $\sigma \neq 0$ . Microscopicamente, essa carga reside numa *camada de transição*, formada por algumas camadas atômicas na superfície.

Exatamente na *superfície*, do lado isolante, temos então  $\mathbf{E} \neq 0$ , mas este campo  $\mathbf{E}$  não pode ter uma componente *tangencial* à superfície, pois ela produziria um deslocamento de cargas sobre a superfície (corrente superficial). Logo, a componente tangencial do campo elétrico,  $E_{\text{tang}}$ , tem de anular-se na superfície.

$$E_{\text{tang}} = 0 \text{ na superfície de um condutor} \quad (3.5.10)$$

ou seja, *as linhas de força de  $\mathbf{E}$  têm de ser normais à superfície do condutor*.

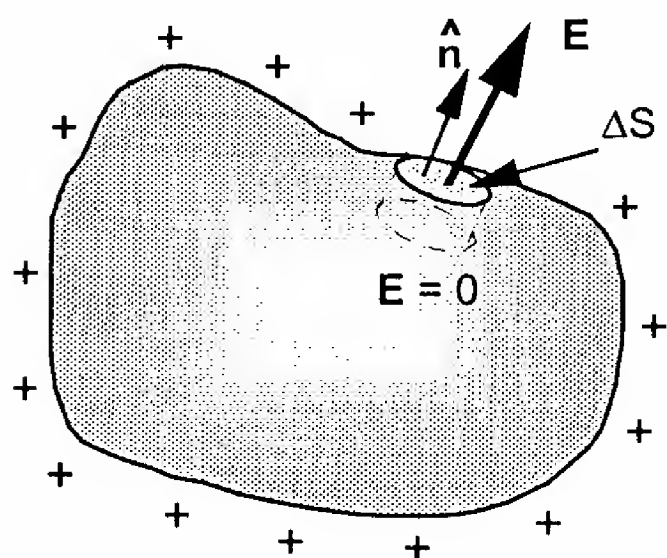


Figura 3.23 Superfície gaussiana (caixa cilíndrica) na superfície de um condutor

Consideremos então uma superfície gaussiana em forma de caixa cilíndrica, com a tampa  $\Delta S$  na superfície de um condutor e a base dentro dele (fig. 3.23). Sobre  $\Delta S$ ,  $\mathbf{E}$  tem a direção da normal externa  $\hat{\mathbf{n}}$ . Na base e na superfície lateral, que estão dentro do material condutor,  $\mathbf{E} = 0$ . Logo, o fluxo total de  $\mathbf{E}$  sobre a superfície gaussiana é

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} \Delta S = E_n \Delta S = \Delta Q / \epsilon_0 = \sigma \Delta S / \epsilon_0$$

usando a lei de Gauss. Obtemos assim, na superfície do condutor,

$$\mathbf{E} = E_n \hat{\mathbf{n}} = (\sigma / \epsilon_0) \hat{\mathbf{n}} \quad (3.5.11)$$

onde  $\sigma$  é a densidade superficial da carga, tomada no ponto onde se calcula o campo  $\mathbf{E}$ .

Comparando com o resultado (3.2.6), válido logo acima (sinal +) e logo abaixo (sinal -) do centro de um disco circular uniformemente carregado, vemos que a (3.5.11) representa o *dobro* do campo acima do disco. A razão é simples: se subdividirmos a contribuição das cargas superficiais do condutor numa porção devida a um disco circular muito pequeno, com centro no ponto considerado, e noutra, devida ao resto das cargas, a segunda deve cancelar a primeira logo abaixo do disco — dentro do condutor, onde  $\mathbf{E} = 0$  — logo, duplica-a logo acima dele.

### 3.6 Divergência de um vetor e equação de Poisson

Numa teoria de campo, queremos exprimir o estado do campo  $\mathbf{E}$  num ponto  $P$  em termos de seu comportamento na *vizinhança imediata* de  $P$ . Pela lei de Gauss,

$$\Phi_S \equiv \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

é um indicador *global* da presença de cargas (fontes de  $\mathbf{E}$ ) no volume interno a  $S$ . Queremos agora encontrar um indicador *local* que sinalize a presença de fontes num ponto  $P$ .

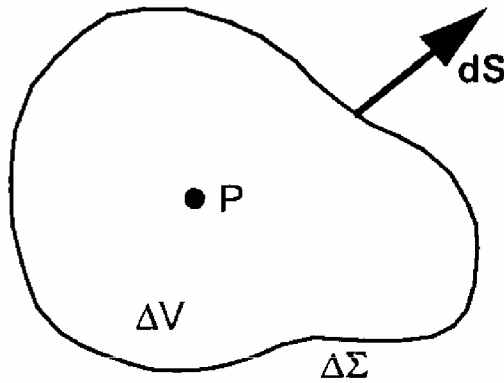


Figura 3.24 Volume  $\Delta V$  limitado por uma superfície  $\Delta \Sigma$  em torno de  $P$

Para isso, envolvemos  $P$  por uma superfície gaussiana fechada  $\Delta \Sigma$ , que limita um volume muito pequeno  $\Delta V$  (fig. 3.24) e contém uma carga  $\Delta q = \rho(P) \Delta V$ , onde  $\rho(P)$  é a densidade volumétrica de carga em  $P$ . Aplicando a lei de Gauss a  $\Delta \Sigma$ , obtemos

$$\Phi_{\Delta \Sigma} = \oint_{\Delta \Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Delta q / \epsilon_0 = \rho(P) \Delta V / \epsilon_0$$

o que dá

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta \Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right] = \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} \quad (3.6.1)$$

Esse limite, que caracteriza a *densidade de fontes do campo* em  $P$ , é independente da forma de  $\Delta \Sigma$  e define assim uma *característica local do campo*  $\mathbf{E}$ , que se chama a sua *divergência*, e se representa pela notação  $\text{div } \mathbf{E}$ . Para um vetor  $\mathbf{v}$  qualquer, definimos

$$\text{div } \mathbf{v}(P) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta \Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (3.6.2)$$

onde  $\Delta V$  é um volume arbitrário que envolve o ponto  $P$  e  $d\mathbf{S}$  é o elemento de superfície orientado segundo a normal externa à superfície  $\Delta \Sigma$  de  $\Delta V$ .

Das (3.4.30) e (3.4.31), decorre a *equação de Poisson* da eletrostática

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (3.6.3)$$

que é a *forma local da lei de Gauss*. Em particular, no interior de um meio condutor, onde  $\mathbf{E} = 0$ , isso implica que temos também  $\rho = 0$ , conforme já havíamos visto.

A fig. 3.25 mostra a relação entre o sinal de  $\text{div } \mathbf{v}(P)$  e o aspecto das linhas de força de  $\mathbf{v}$  num entorno de  $P$ . Em (a), temos uma *fonte* em  $P$  e  $\text{div } \mathbf{v}(P) > 0$ ; em (b), temos um *sorvedouro* em  $P$  e  $\text{div } \mathbf{v}(P) < 0$ ; em (c), não há fonte nem sorvedouro em  $P$ , e  $\text{div } \mathbf{v}(P) = 0$ .

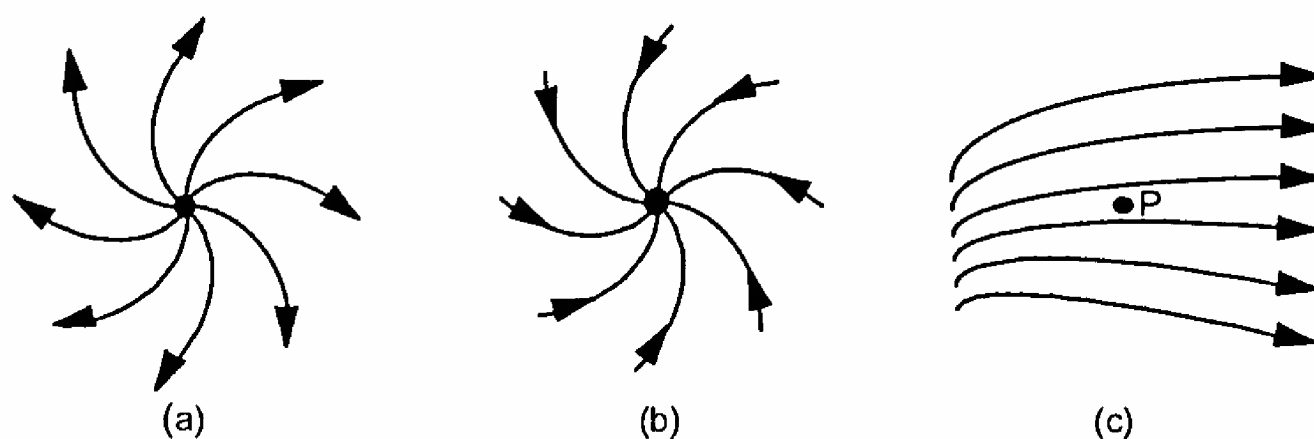


Figura 3.25 (a)  $\text{div } \mathbf{v}(P) > 0$  (fonte); (b)  $\text{div } \mathbf{v}(P) < 0$  (sorvedouro); (c)  $\text{div } \mathbf{v}(P) = 0$

### Cálculo de $\text{div } \mathbf{v}$ em coordenadas cartesianas

Como a definição (3.6.2) de  $\text{div } \mathbf{v}$  é independente da forma do elemento de volume  $\Delta V$ , vamos escolher um elemento de volume com a forma de um paralelepípedo retângulo centrado no ponto  $P(x, y, z)$  e de lados infinitesimos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  (fig. 3.26), cujos vértices têm coordenadas  $(x \pm \frac{1}{2} \Delta x, y \pm \frac{1}{2} \Delta y, z \pm \frac{1}{2} \Delta z)$ .

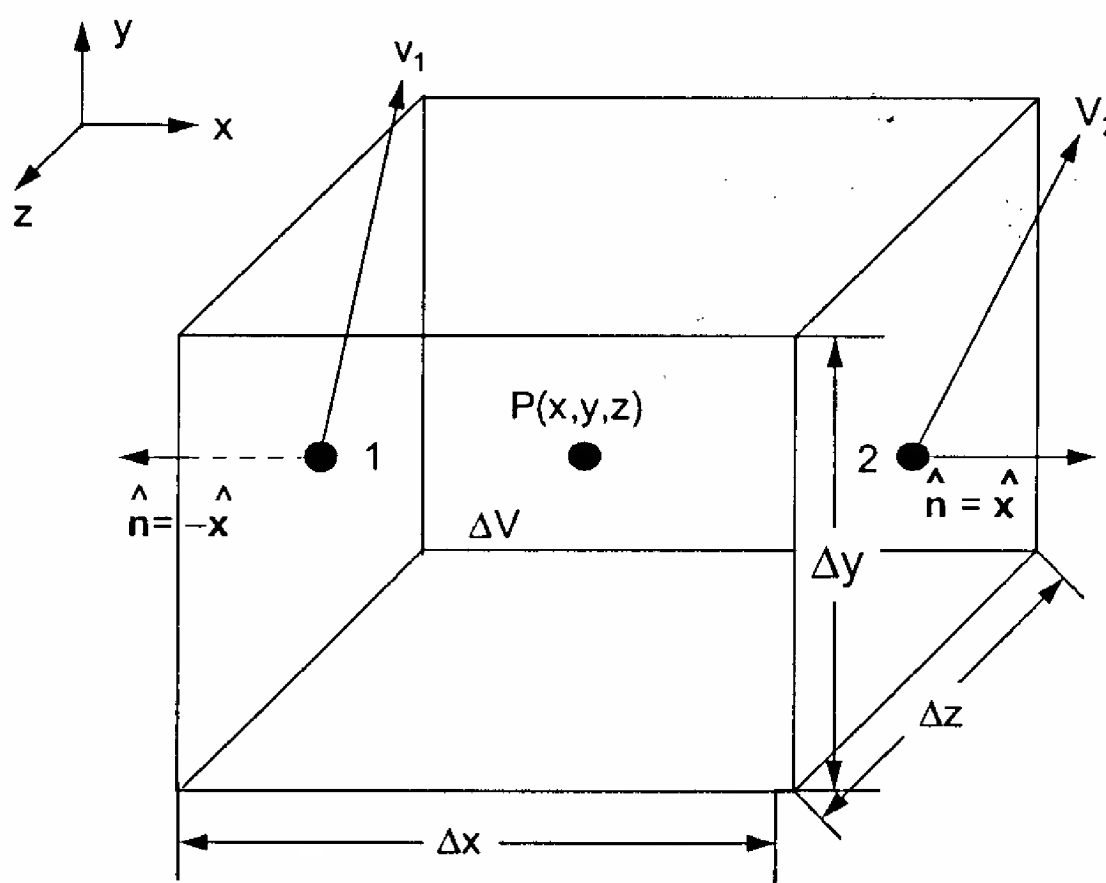


Figura 3.26 Elemento de volume para cálculo de  $\text{div } \mathbf{E}$  em coordenadas cartesianas

Vamos calcular o fluxo de  $\mathbf{v}$  através das faces perpendiculares à direção  $x$ , com área  $\Delta y \Delta z$ , tomando os pontos 1 e 2 onde  $\mathbf{v}$  é calculado no centro destas faces. Assim, os pontos 1 e 2 têm coordenadas, respectivamente  $(x \pm \frac{1}{2} \Delta x, y, z)$  ou seja, só diferem pela coordenada  $x$ , em  $\Delta x$ .

O fluxo  $\Phi_x$ , através dessas duas faces, considerando que  $\Delta y$  e  $\Delta z$  são infinitésimos, pode ser aproximado por

$$\Phi_x = [v_x(2) - v_x(1)] \Delta S = [v_x(2) - v_x(1)] \Delta y \Delta z$$

Pela definição de derivada parcial, como  $\Delta x$  é infinitésimo.

$$v_x\left(x \pm \frac{1}{2} \Delta x, y, z\right) = v_x(x, y, z) \pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x}(x, y, z) \Delta x$$

o que dá

$$v_x(2) - v_x(1) = \frac{\partial v_x}{\partial x}(x, y, z) \Delta x$$

Substituindo na expressão acima de  $\Phi_x$ , vem

$$\Phi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta V$$

Para os fluxos sobre os dois outros pares de faces  $\Phi_y$  e  $\Phi_z$ , valem resultados análogos, o que dá

$$\Phi_x + \Phi_y + \Phi_z = \oint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Delta V$$

onde  $\Delta \Sigma$  é a superfície gaussiana que delimita o volume  $\Delta V$ .

Levando esse resultado na (3.6.2), obtemos finalmente a expressão da divergência de um vetor em coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}} \quad (3.6.4)$$

onde as derivadas parciais são todas calculadas no ponto  $P(x, y, z)$ .

*Exemplo 1* – Seja  $\mathbf{v} = \mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ . Aplicando a definição (3.6.2), onde tomamos para  $\Sigma$  uma esfera de raio  $r$  com centro na origem, vem



$$\oint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} r dS = rS = 4\pi r^3$$

e

$$\Delta V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

o que dá  $\text{div } \mathbf{r} = 3$  na origem. Por outro lado pela (3.6.4),

$$\text{div } \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Vemos que o resultado vale em qualquer ponto do espaço.

*Exemplo 2* – Consideremos uma carga puntiforme  $q$  na origem. O campo que produz num ponto  $\mathbf{r}$  é, pela lei de Coulomb,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Exceto na origem, a densidade de carga é  $= 0$ , de forma que a equação de Poisson (3.6.3) dá

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (r \neq 0)$$

Vamos verificar esse resultado. Temos

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right)$$

onde

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}$$

Logo,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right)$$

e resultados correspondentes para as direções  $y$  e  $z$ , o que dá, para  $r \neq 0$ ,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0 \quad (r \neq 0)$$

concordando com o resultado acima.

### O teorema de Gauss

Para um volume  $\Delta V$  suficientemente pequeno (infinitésimo), limitado por uma superfície  $\Delta\Sigma$ , a (3.6.2) dá

$$\oint_{\Delta\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \text{div } \mathbf{v} \Delta V \quad (3.6.5)$$

Qualquer volume  $V$  pode ser decomposto em elementos de volume  $\Delta V$  aos quais podemos aplicar esse resultado. Se somarmos as contribuições de todos esses elementos, obtemos, no limite em que  $\Delta V \rightarrow 0$ ,

$$\sum \text{div } \mathbf{v} \Delta V \rightarrow \int_V \text{div } \mathbf{v} dV$$

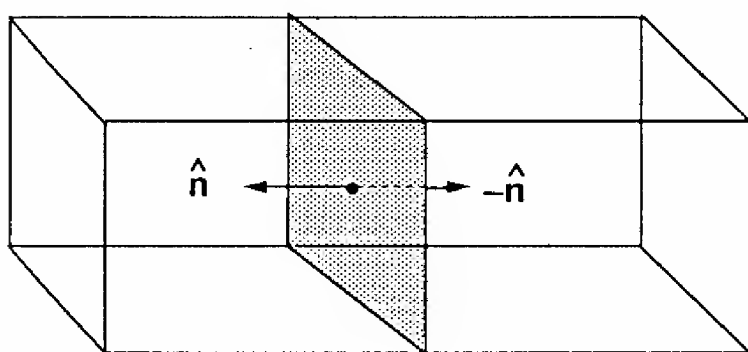


Figura 3.27 Fluxos sobre a face comum de elementos de volume adjacentes se cancelam

Por outro lado, ao somar os fluxos do 1.º membro da (3.6.5) sobre todos os elementos, cada elemento de superfície de  $\Delta\Sigma$  interno ao volume  $V$  é comum a dois elementos de volume adjacentes, com suas normais externas orientadas em sentidos opostos (fig. 3.27). Assim, as contribuições ao fluxo de elementos de superfície internos cancelam-se duas a duas, restando somente o fluxo sobre a superfície externa  $S$  do volume  $V$ , ou seja, a soma dos fluxos dá

$$\sum \oint_{\Delta\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Resulta então finalmente,

$$\boxed{\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}} \quad (3.6.6)$$

onde  $V$  é um volume limitado por uma superfície fechada  $S$  e  $d\mathbf{S}$  é o elemento de superfície orientado segundo a normal externa. Esse resultado, que se aplica a qualquer campo vetorial  $\mathbf{v}$ , é o *teorema de Gauss*.

Em particular, tomando para  $\mathbf{v}$  o campo eletrostático  $\mathbf{E}$  e usando a equação de Poisson (3.6.3), resulta

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

que é a lei de Gauss. Vemos assim que a equação de Poisson é *equivalente* à lei de Gauss.

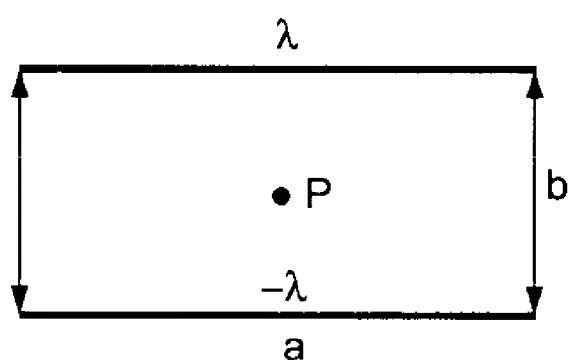
## PROBLEMAS

1. Trace de forma esquemática as linhas de força associadas a um par de cargas pontiformes  $+2q$  e  $-q$ , separadas por uma distância  $d$ . Explique o traçado e discuta qualitativamente o comportamento das linhas em pontos próximos e distantes das cargas, em diferentes regiões.

2. Um modelo clássico de uma molécula ionizada é constituído por um par de partículas fixas, ambas de carga  $+e$ , separadas por uma distância  $2a$ , com uma terceira partícula, de carga  $-e$ , massa  $m$ , descrevendo uma órbita circular de raio  $\rho$  em torno do eixo que liga as duas outras cargas. Obtenha: (i) o campo elétrico que atua sobre a carga  $-e$ ; (ii) a relação entre o raio  $\rho$  e a frequência angular de revolução  $\omega$ .

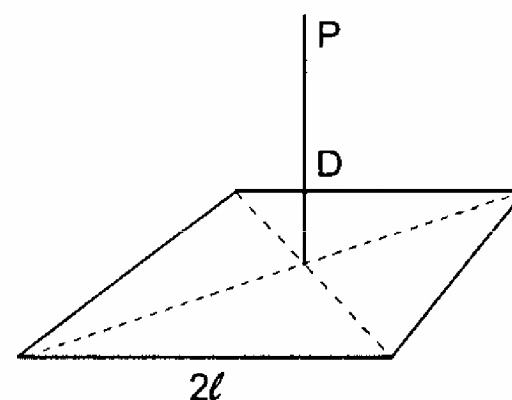
3. Seja  $E$  a magnitude do campo num ponto  $P$  situado a uma distância  $D$  de um plano uniformemente carregado com densidade superficial de carga  $\sigma$ . A maior contribuição para  $E$  provém dos pontos mais próximos de  $P$  sobre o plano. Mostre que a região do plano situada a uma distância  $\leq 2D$  do ponto  $P$  é responsável pela metade ( $E/2$ ) do campo em  $P$ .

4. Um fio retilíneo de comprimento  $l$  está uniformemente carregado com densidade linear de carga  $\lambda$ . (a) Calcule o campo elétrico num ponto situado sobre o prolongamento do fio, a uma distância  $d$  de sua extremidade. (b) Calcule a magnitude do campo, se  $l = d = 5\text{cm}$  e a carga total do fio é de  $3\text{ }\mu\text{C}$ .



5. Dois fios retilíneos de mesmo comprimento  $a$ , separados por uma distância  $b$ , estão uniformemente carregados com densidades lineares de carga  $\lambda$  e  $-\lambda$  (fig.). Calcule o campo elétrico no centro  $P$  do retângulo de lados  $a$  e  $b$  (veja sugestão do problema 8 do Cap. 2).

6. Um fio quadrado de lado  $2l$  está uniformemente carregado com densidade linear de carga  $\lambda$ . Calcule o campo elétrico num ponto  $P$  situado sobre a perpendicular ao centro do quadrado, à distância  $D$  do seu plano (fig.). **Sugestão:** Use componentes cartesianas e considerações de simetria.



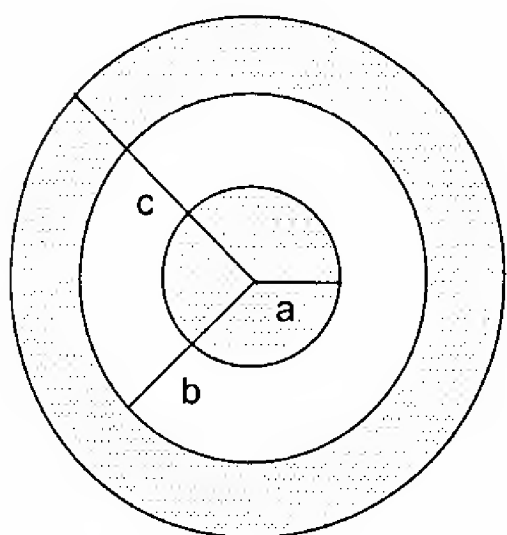
7. Uma carga puntiforme  $q$  é colocada numa caixa cúbica de aresta  $l$ . Calcule o fluxo do campo elétrico sobre cada uma das faces (a) se a carga ocupa o centro do cubo; (b) se é colocada num dos vértices.

8. O valor médio do campo elétrico na atmosfera num determinado dia, num ponto da superfície da Terra é de 300 N/C, dirigido verticalmente para baixo. A uma altitude de 1400 m, ele reduz-se a 20 N/C. Qual é a densidade média de carga na atmosfera abaixo de 1400 m? [Para mais informações sobre eletricidade atmosférica, veja R. P. Feynman, *Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1964), vol. 2, Cap.9].

9. Dois planos paralelos estão uniformemente carregados, com densidades superficiais de carga  $\sigma$  e  $-\sigma$ , respectivamente. Calcule o campo elétrico em pontos acima de ambos, abaixo de ambos, e entre os dois. Represente as linhas de força nas três regiões.

10. No modelo clássico de J. J. Thomson para o átomo de hidrogênio, a carga  $+e$  do núcleo era imaginada como estando uniformemente distribuída no interior de uma esfera de raio  $a$  da ordem de  $10^{-8}$  cm (raio atômico) e o elétron era tratado como uma carga puntiforme  $-e$  movendo-se no interior desta distribuição. (a) Calcule o campo elétrico que atuaria sobre o elétron num ponto à distância  $r < a$  do centro da esfera; (b) mostre que o elétron poderia mover-se radialmente com um movimento harmônico simples; (c) Calcule a frequência de oscilação e compare-a com uma frequência típica da luz visível, bem como com o resultado do Probl. 3 do Cap. 2.

11. Calcule  $\text{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$ , onde  $\mathbf{c}$  é um vetor constante.



12. Uma casca esférica de raio interno  $b$  e raio externo  $c$ , uniformemente carregada com densidade de carga volumétrica  $\rho$ , envolve uma esfera concêntrica de raio  $a$ , também carregada uniformemente com a mesma densidade (fig.).

Calcule o campo elétrico nas quatro regiões diferentes do espaço:  $0 \leq r \leq a$ ,  $a \leq r \leq b$ ,  $b \leq r \leq c$ ,  $c \leq r$ .

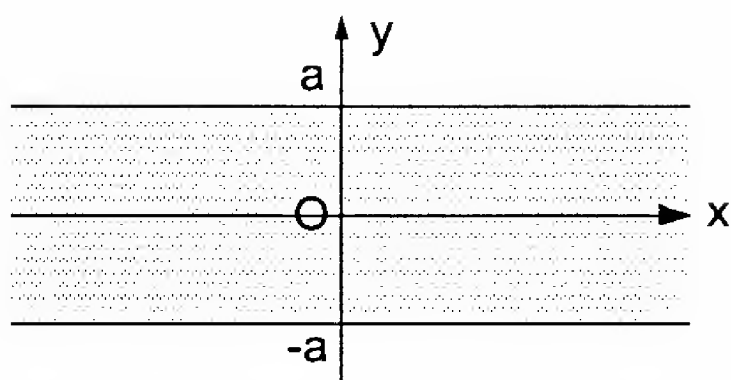
13. Uma distribuição de carga esfericamente simétrica tem densidade volumétrica de carga dada por

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/a) \quad (0 \leq r < \infty)$$

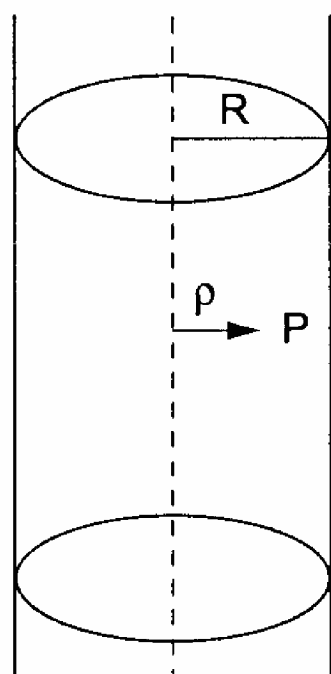
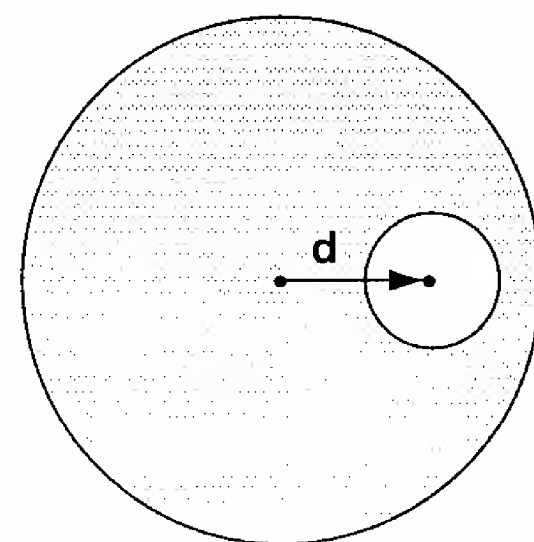
onde  $\rho_0$  é uma constante e  $r$  é a distância à origem.

(a) Calcule a carga total da distribuição

(b) calcule o campo elétrico num ponto qualquer do espaço.



15. Uma esfera uniformemente carregada com densidade volumétrica  $\rho$  contém em seu interior uma cavidade esférica. Mostre que o campo no interior da cavidade é uniforme e é dado por  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{d} / (3 \epsilon_0)$ , onde  $\mathbf{d}$  é o vetor que liga os centros das duas esferas (fig.). **Sugestão:** Use o princípio de superposição.



16. Um cilindro circular muito longo, de raio  $R$ , está uniformemente carregado, com densidade volumétrica de carga  $\delta$ .

(a) Por argumentos de simetria (explicando-os), obtenha a direção e o sentido do campo  $\mathbf{E}$  num ponto  $P$  à distância  $\rho$  do eixo do cilindro e sua dependência das coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ .

(b) Calcule  $|\mathbf{E}|$  num ponto  $P$  interno ao cilindro  $(0 < \rho < R)$ .

(d) Esboce um gráfico de  $|\mathbf{E}|$  em função de  $\rho$ .

# 4

## O POTENCIAL ELETROSTÁTICO

O campo eletrostático, como o campo gravitacional, é *conservativo*. Isso permite simplificar sua descrição, reduzindo-a a uma única função escalar, o *potencial eletrostático*, que trataremos neste capítulo. Veremos também uma forma de exprimir localmente o caráter conservativo do campo, introduzindo o *rotacional* de um campo vetorial.

### 4.1 Recapitulação sobre campos conservativos

Vamos recapitular brevemente resultados gerais sobre campos conservativos já vistos no curso de Mecânica (*Física Básica 1*, Seções 7.2 a 7.5). Vimos que, se  $C$  é um caminho qualquer entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , *orientado* de  $P_1$  para  $P_2$  (fig. 4.1), o *trabalho realizado por uma força  $F$*  ao longo deste caminho é definido por

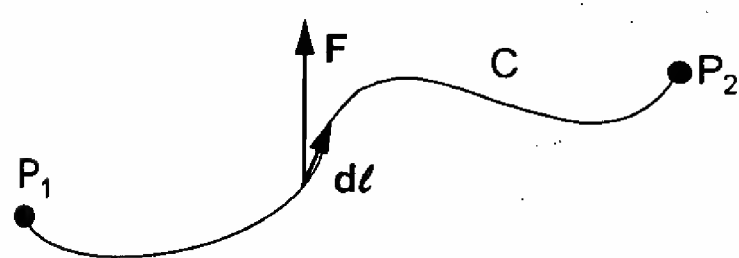


Figura 4.1 Trabalho da força  $F$  ao longo de  $C$

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^{(C)} \equiv \int_{P_1(C)}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.1.1)$$

onde o elemento de linha  $d\mathbf{l}$  tem a orientação de  $C$ . No SI, o trabalho se mede em J (joules). Em particular se  $C$  é a trajetória descrita por uma partícula de massa  $m$ , com velocidade  $\mathbf{v}(t)$ , sob a ação de  $F$ , temos

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^{(C)} = T_2 - T_1 \quad (4.1.2)$$

onde  $T = \frac{1}{2} m v^2$  é a energia cinética da partícula; ou seja, o trabalho é igual à variação da energia cinética entre os dois pontos.

Se  $\mathbf{F}$  é uma *força central*,

$$\mathbf{F} = F(r) \hat{\mathbf{r}} \quad (4.1.3)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}$  é o versor da direção radial, com origem no centro de forças, a (4.1.1) fica

$$W_{P_1 \rightarrow P_2}^{(C)} \equiv \int_{P_1(C)}^{P_2} F(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \quad (4.1.4)$$

o que não depende do caminho  $C$ , mas tão somente dos pontos inicial e final. Podemos escrever

$$\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = -[U(r_2) - U(r_1)] \quad (4.1.5)$$

onde

$$U(r) \equiv - \int_{r_0}^r F(r') dr' \quad (4.1.6)$$

em que  $r_0$  é um ponto arbitrariamente escolhido, onde se toma  $U = 0$ .

As (4.1.2) a (4.1.5) dão então

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E \quad (4.1.7)$$

que exprime a *conservação da energia*. A função  $U(r)$  é a *energia potencial*, e  $E$  é a *energia total*. A energia potencial é definida a menos de uma constante aditiva arbitrária, que corresponde na (4.1.6) à arbitrariedade na escolha de  $r_0$  (onde  $U$  se anula). A *variação* (4.1.5) da energia potencial entre dois pontos é bem definida, independentemente da escolha dessa constante.

Uma força para a qual o trabalho (4.1.1) depende apenas dos pontos inicial e final, e não do caminho  $C$  entre eles, chama-se *conservativa*.

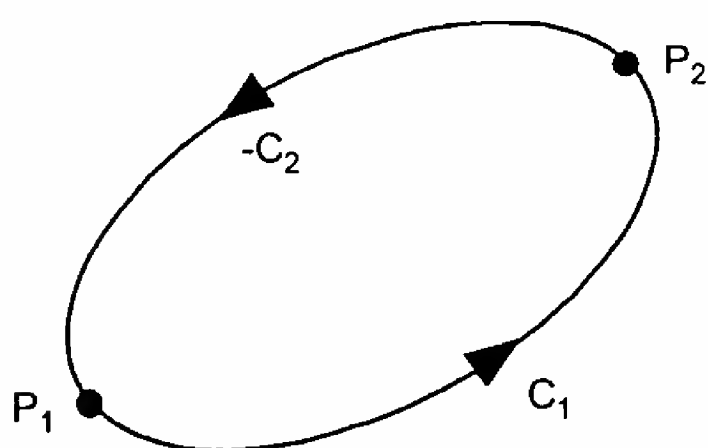


Figura 4.2 Caminho fechado  $C = C_1 + (-C_2)$

A independência do caminho pode ser expressa de forma equivalente notando que, se invertermos o sentido de um dos dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$  entre dois pontos, formamos um caminho fechado orientado  $C = C_1 + (-C_2)$ . A inversão do sentido de  $C_2$  troca o sinal do trabalho sobre  $C_2$ , levando a

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.1.8)$$

onde o 1.º membro chama-se *circulação da força  $\mathbf{F}$  ao longo do caminho fechado orientado  $C$* . O raciocínio também vale em sentido inverso. Logo *é condição necessária e suficiente para que uma força seja conservativa que sua circulação ao longo de qualquer caminho fechado seja  $= 0$* . Além das forças centrais, outros exemplos de forças conservativas foram vistos no curso de Mecânica.

A generalização da (4.1.5) é

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -[U(P_2) - U(P_1)] \quad (4.1.9)$$

e, para um deslocamento infinitésimo,  $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$ ,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) \quad (4.1.10)$$

o que também pode ser escrito

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (4.1.11)$$

onde, em coordenadas cartesianas,

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.1.12)$$

O gradiente é uma espécie de "derivada tridimensional" de uma função escalar. Projetando-o sobre uma direção de versor  $\hat{\mathbf{s}}$ , obtemos a *derivada direcional na direção  $\hat{\mathbf{s}}$* :

$$\partial U / \partial s = \hat{\mathbf{s}} \cdot \text{grad } U \quad (4.1.13)$$

As derivadas nas direções dos eixos cartesianos na (4.1.12) são um caso particular.

Uma superfície em que  $U$  é constante chama-se *superfície eqüipotencial*. Assim, para forças centrais, as superfícies eqüipotenciais são esferas concêntricas  $r = \text{constante}$ . Se  $d\mathbf{l}$  é um deslocamento sobre uma superfície eqüipotencial, temos então

$$dU = \text{grad } U \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.1.14)$$

mostrando que  $\text{grad } U$ , portanto  $\mathbf{F}$ , são perpendiculares às superfícies eqüipotenciais. Logo, *as linhas de força de um campo conservativo são trajetórias ortogonais das superfícies eqüipotenciais deste campo*.

Temos ainda, pela primeira igualdade da (4.1.14), que  $dU$  é máximo quando  $d\mathbf{l}$  é paralelo a  $\text{grad } U$ . Logo, *a direção de  $\text{grad } U$  é a da linha de maior aclave*, sobre a qual  $U$  cresce o mais rapidamente possível, e  $\text{grad } U$  aponta no sentido de  $U$  crescente.



*Exemplo:* Para qualquer função que só dependa de  $r$ ,  $f(r)$ , a (4.1.13) dá

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \hat{r} \quad (4.1.15)$$

Em particular,  $\text{grad } r = \hat{r}$ , que aponta na direção em que  $r$  cresce o mais rapidamente possível (direção radial).

## 4.2 O potencial coulombiano

O campo devido a uma carga puntiforme  $q$  na origem,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (4.2.1)$$

que representa a força sobre uma carga de prova unitária, é central, e por conseguinte conservativo. O trabalho correspondente sobre a carga de prova unitária, levada de  $P_1$  para  $P_2$ , é independente do caminho, e a (4.1.9) dá

$$\boxed{-\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \equiv V(P_2) - V(P_1)} \quad (4.2.2)$$

o que define (de forma geral), a *diferença de potencial* entre  $P_2$  e  $P_1$ . É o trabalho que tem de ser realizado contra a força exercida pelo campo para levar uma carga unitária de  $P_1$  para  $P_2$ . Se  $V(P_2) > V(P_1)$ , a energia potencial de uma carga positiva é maior em  $P_2$  do que em  $P_1$ .

Como trabalho por unidade de carga, suas unidades são J/C. Por definição,

$$\boxed{1 \text{ J/C} \equiv 1 \text{ V(volt)}} \quad (4.2.3)$$

A (4.2.1), para uma carga puntiforme  $q$  na origem dá

$$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (4.2.4)$$

A escolha do nível zero para  $V$  é arbitrária (como para  $W$ ). Para uma *distribuição de carga toda contida numa região finita do espaço* (como é o caso de uma carga puntiforme), é conveniente convencionar que

$$V(\infty) = 0 \quad (4.2.5)$$

Com essa convenção, a (4.2.4) dá

$$\boxed{V(r) = -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (4.2.6)$$

para o *potencial coulombiano de uma carga puntiforme  $q$  na origem*. Ele representa o trabalho por unidade de carga necessário para trazer uma carga de prova desde uma distância infinita até uma distância  $r$  da carga  $q$ . Note que o potencial coulombiano de uma carga cai com  $1/r$ , em lugar de  $1/r^2$ , como o campo. As superfícies equipotenciais são esferas com centro na carga.

É importante observar que a convenção (4.2.5) para escolha do zero do potencial não pode ser adotada quando a distribuição de carga se estende até o infinito. Veremos exemplos mais adiante.

### *Cálculo de campo a partir do potencial*

O análogo da (4.1.11) para uma carga de prova unitária é

$$\boxed{\mathbf{E} = -\text{grad } V} \quad (4.2.7)$$

Em particular, para  $V = V(r)$ ,

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.2.8)$$

o que recupera o campo coulombiano a partir da (4.2.6),

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

A unidade de campo elétrico (1 N/C) é também equivalente a 1 V/m (volt por metro, mais familiar). Já vimos no curso de Mecânica\* que também se usa o eV (elétron-volt) como unidade de energia: é a energia potencial adquirida por uma partícula de carga igual à do elétron ao atravessar uma diferença de potencial de 1 volt. Pela (2.5.1), temos portanto

$$1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (4.2.9)$$

### *Potencial de uma distribuição de cargas*

Pelo princípio de superposição, para um sistema de cargas puntiformes como o da fig. 3.1,

$$\boxed{V(P) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_j}} \quad (4.2.10)$$

onde  $r_j$  é a distância da carga  $q_j$  ao ponto P.

---

\* Fís. Bás. 1, Seq. 7.5

Para distribuições contínuas de cargas, esse resultado se generaliza para

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (4.2.11)$$

onde  $r$  é a distância do ponto  $P$  ao elemento de carga  $dq$ , e

$$dq = \begin{cases} \rho dv & (\text{distribuição volumétrica}) \\ \sigma dS & (\text{distribuição superficial}) \\ \lambda dl & (\text{distribuição linear}) \end{cases} \quad (4.2.12)$$

Em geral é mais simples calcular  $V$  (uma só função escalar) e obter  $\mathbf{E}$  como  $-\text{grad } V$ , do que calcular as três componentes de  $\mathbf{E}$ .

### *Distribuições de cargas dadas e problemas de contorno*

Vimos na (3.5.2) que o campo elétrico na superfície de um condutor é normal à superfície. Logo, a *superfície de um condutor é uma superfície equipotencial*. Como  $\mathbf{E} = 0$  no interior do meio condutor, o volume do condutor contíguo à superfície também está no mesmo potencial.

Em princípio, podemos produzir uma distribuição de cargas arbitrária num corpo *isolante*, pois a carga permanece onde foi colocada. Neste caso, a (4.2.11) resolve o problema do cálculo do potencial. Entretanto, isso não se aplica a condutores: quando transmitimos carga a um corpo condutor, a distribuição de equilíbrio eletrostático é aquela para a qual o campo no interior do meio se anula. Logo, a carga terá de se distribuir sobre a superfície de forma a satisfazer a essa condição, o que equivale a dizer que a superfície tem de ser equipotencial.

A solução de um problema desse tipo é portanto especificada por condições a serem satisfeitas na superfície de condutores, que se chamam por isso de *condições de contorno*, e o problema correspondente chama-se um *problema de contorno*. Não podemos resolvê-lo empregando a (4.2.11), porque não conhecemos a densidade de carga superficial  $\sigma$  no condutor; ela é uma das incógnitas do problema e, para um condutor de forma qualquer,  $\sigma$  variará em geral de ponto a ponto da superfície.

Em geral, é bem mais difícil resolver um problema de contorno com condutores do que um problema com isolantes, nos quais a distribuição de cargas é dada, cuja solução é a (4.2.11). Entretanto, podemos empregar uma tática inversa, que poderíamos chamar de "uma solução à procura de um problema", em lugar de um problema do qual procuramos a solução. Dado um potencial (4.2.11) que corresponde a uma determinada distribuição de cargas, podemos determinar as suas superfícies equipotenciais. Uma vez obtidas, podemos imaginar uma ou mais dessas superfícies materializadas como superfícies de condutores. O potencial dado será então solução de um problema de contorno com esses condutores. Exemplos serão vistos a seguir.

### 4.3 Exemplos de cálculo de potencial

*Exemplo 1: Anel isolante uniformemente carregado, ponto P no eixo:*

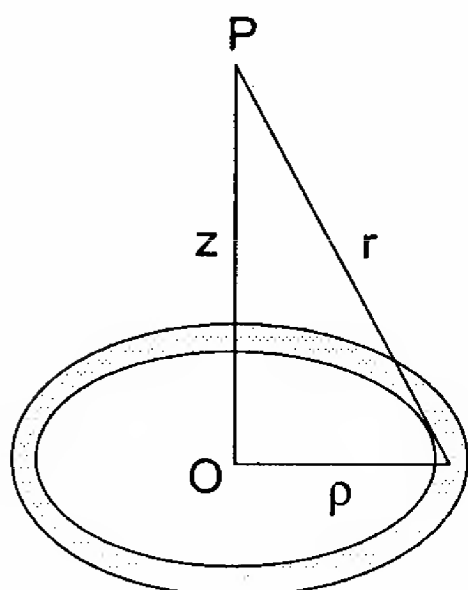


Figura 4.3 Anel carregado

Para um anel de largura muito pequena, todos os pontos são equidistantes de um ponto P no eixo (fig.4.3). Se  $Q$  é a carga total do anel, temos então

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{1/2}} \quad (4.3.1)$$

o que dá

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } V = -\frac{dV}{dz} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

que é obtido de forma bem mais simples do que seria o cálculo direto do campo.

*Exemplo 2: Disco circular isolante uniformemente carregado, ponto P no eixo:*

Seja  $a$  o raio do disco e  $\sigma$  a densidade superficial de carga. Podemos decompor o disco em anéis concêntricos de raio variável  $\rho$ , largura infinitesimal  $d\rho$  e carga  $dQ = 2\pi \rho d\rho \cdot \sigma$  (fig. 4.4) e usar o resultado (4.3.1) para obter  $V(P)$ :

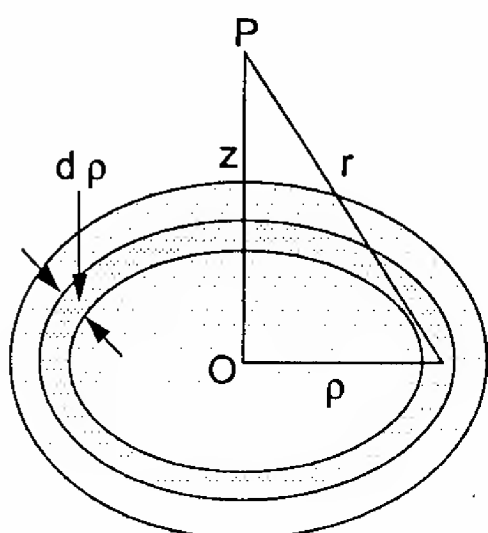


Figura 4.4 Disco carregado uniformemente

$$V(z) = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (\rho^2 + z^2)^{1/2} \right]_0^a$$

o que dá

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (a^2 + z^2)^{1/2} - |z| \right] \quad (4.3.3)$$

onde o último termo é  $(z^2)^{1/2} = |z|$ .

O campo  $\mathbf{E}$  é então

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dz} \hat{\mathbf{z}}$$

o que dá, notando que

$$\frac{d}{dz}|z| = \frac{z}{|z|} = \begin{cases} +1 (z > 0) \\ -1 (z < 0) \end{cases}$$

o resultado

$$\mathbf{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{z}{|z|} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

que coincide com a expressão anterior (Ex.2, Seç. 3.2) e, como já vimos, troca de sinal com  $z$ .

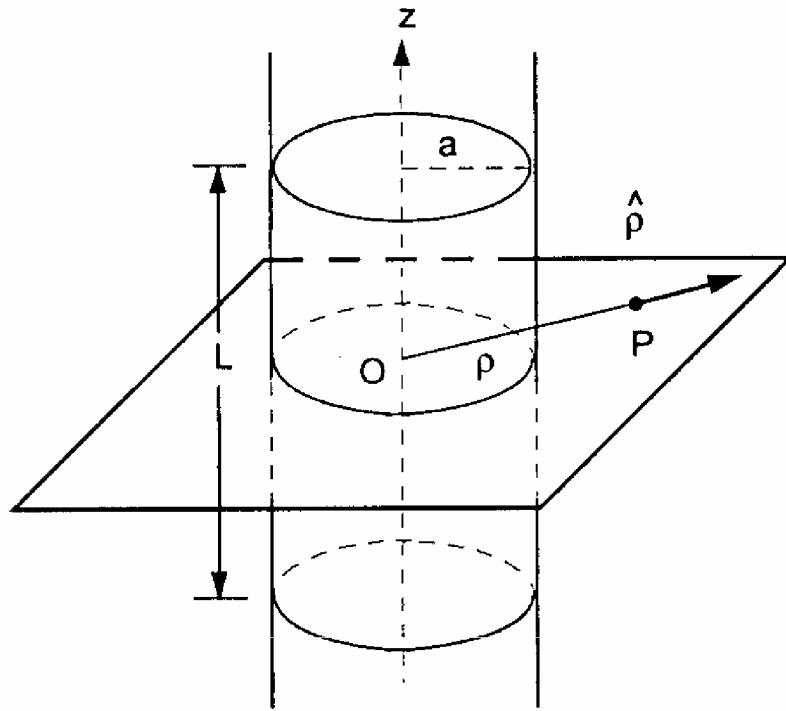
Em particular, no limite em que  $a \rightarrow \infty$  (plano uniformemente carregado), voltamos a obter o resultado (3.2.6):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.3.4)$$

### Exemplo 3: Cilindro circular condutor carregado

Consideremos o problema de um fio uniformemente carregado com densidade linear de carga  $\lambda$  (Seç. 3.5). Nesse caso, não podemos aplicar a fórmula (4.2.11), em que se supôs  $V(\infty) = 0$ , porque a distribuição de carga se estende até o infinito!

Porém, é sempre válida a expressão (4.2.2) para a diferença de potencial entre dois pontos 1 e 2, que dá



$$V(2) - V(1) = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.3.5)$$

Vimos na (3.4.21), como aplicação da lei de Gauss, que

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad (4.3.6)$$

onde  $\rho$  é a distância ao eixo (fig. 4.5).

Substituindo essa expressão na (4.3.5), obtemos para  $(\rho_1, \rho_2) \geq a$ ,

Figura 4.5 Cilindro circular condutor de raio  $a$

$$\begin{aligned} V(2) - V(1) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln \rho]_1^2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \end{aligned}$$

Vemos, efetivamente, que  $V(2) - V(1) \rightarrow \infty$  quando  $\rho_2 \rightarrow \infty$ .

Se escolhermos o nível zero do potencial em  $\rho = a$ , convencioneando que  $V(a) = 0$ , isto dá

$$V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (4.3.7)$$

que se chama *potencial logarítmico*. Como a superfície do cilindro circular,  $\rho = a$ , é uma eqüipotencial, podemos materializá-la como a superfície de um *cilindro condutor*. A (4.3.6) dá o potencial correspondente em função da carga total  $\lambda$  por unidade de comprimento sobre a superfície do cilindro. Para relacioná-la com a densidade superficial de carga  $\sigma$  sobre a superfície do cilindro, basta notar que a carga contida num comprimento  $L$  do cilindro é (fig. 4.5)

$$Q = \lambda L = \sigma S = 2\pi a L \sigma$$

o que dá  $\lambda = 2\pi a \sigma$ . O mesmo resultado se obtém comparando a (3.5.11) com a (4.3.6) para  $\rho = a$ . Substituindo-o na (4.3.7), encontramos

$$V(\rho) = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (4.3.8)$$

para o potencial do cilindro condutor carregado de raio  $a$ . Essa é uma ilustração de "uma solução à procura de um problema".

#### Exemplo 4: Campo uniforme

Vimos, como exemplo de campos uniformes, que um plano uniformemente carregado com densidade superficial  $\sigma$  (fig. 3.18) produz, acima e abaixo dele, campos uniformes em sentidos opostos. Novamente, trata-se de uma distribuição de cargas que se estende até o infinito, e não podemos usar a (4.2.11) para calcular o potencial.

Entretanto, tomando, por exemplo, dois pontos 1 e 2 acima do plano carregado, a diferença de potencial entre eles é dada pela (4.3.5). Substituindo  $E$  pela sua expressão (4.3.4), com  $z > 0$ , resulta

$$V(2) - V(1) = -E(z_2 - z_1) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(z_2 - z_1) \quad (z_1, z_2 > 0)$$

que efetivamente diverge para  $z_2 \rightarrow \infty$ .

Podemos tomar então, como potencial  $V(z)$  associado a um campo uniforme  $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{z}}$ ,

$$V(z) = -Ez + C \quad (4.3.9)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. Para defini-la, podemos escolher, por exemplo, o zero de potencial em  $z = 0$ , o que dá

$$V(z) = -Ez$$

Esse exemplo é análogo ao campo gravitacional perto da superfície da Terra (*Fis. Bás. 1, Seç. 7.3*).

### Exemplo 5: Casca esférica

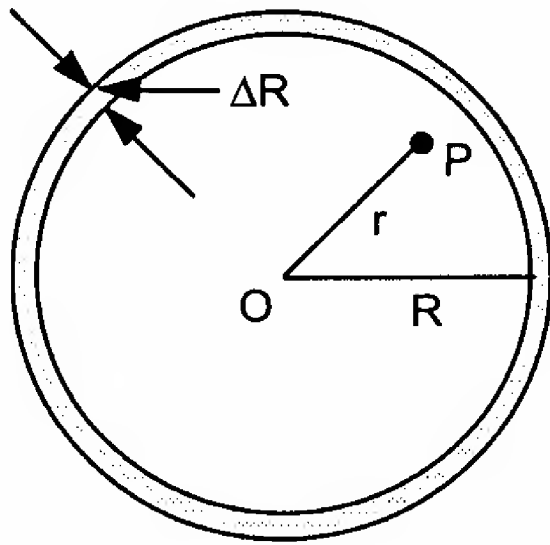


Figura 4.6 Casca esférica

Consideremos uma camada esférica de raio  $R$  e espessura  $\Delta R \ll R$ , uniformemente carregada com densidade volumétrica  $\rho$ ; no limite em que a espessura é infinitésima, podemos tratá-la como uma distribuição superficial de densidade  $\sigma$ , onde  $\rho$  e  $\sigma$  estão relacionados por

$$\Delta Q = 4\pi R^2 \Delta R \rho = 4\pi R^2 \sigma \quad (4.3.10)$$

sendo  $\Delta Q$  a carga total da camada.

Novamente, é mais simples calcular  $V$  a partir de  $\mathbf{E}$ , já calculado usando a lei de Gauss; pelas (3.5.5) e (3.5.6), temos:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

e podemos tomar o nível zero do potencial no infinito, o que dá

$$V(r) = -\int_{\infty}^r E(r') dr' = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (4.3.11)$$

ou seja, fora da casca, como para o campo, o potencial é o mesmo que se toda a carga estivesse concentrada no centro.

Já para  $r < R$ , temos, como  $\mathbf{E} = 0$  dentro da casca,

$$V(r) = -\int_{\infty}^R E(r') dr' = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 R} = V(R) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (4.3.12)$$

ou seja, o potencial dentro da casca é constante e igual ao seu valor na superfície dela.

Como a superfície da casca é uma superfície eqüipotencial, também podemos materializá-la como uma superfície condutora ("solução à procura de um problema").

Os resultados acima dão então o potencial devido a uma *esfera condutora* de raio  $R$  e carga total  $Q$ :

$$V(r) = \frac{V(R)R}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (4.3.13)$$

A fig. 4.7 mostra gráficos da componente radial do campo  $E(r)$  e do potencial  $V(r)$  para a casca esférica ou para uma esfera condutora maciça de raio  $R$ . O campo é descontínuo: é nulo até a superfície, onde tem um salto, e depois cai com  $1/r^2$ . Já o potencial é contínuo na superfície: é constante dentro da esfera e depois cai mais lentamente, com  $1/r$ .

Métodos análogos podem ser empregados para o cálculo do potencial de qualquer distribuição esfericamente simétrica de cargas (cf. Problemas do Cap. 4).

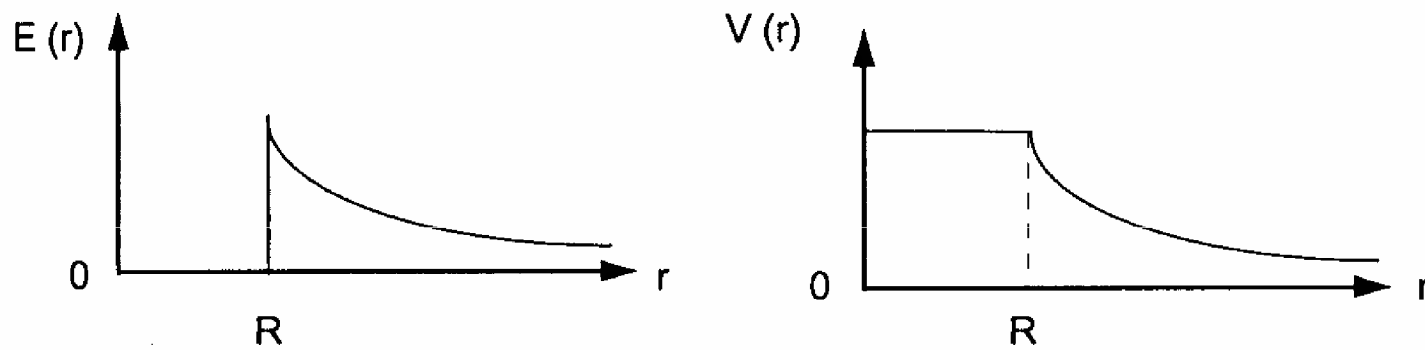


Figura 4.7 Campo radial  $E(r)$  e potencial  $V(r)$  para casca esférica ou esfera condutora

## 4.4 Dipolos elétricos

Um dipolo elétrico é um par de cargas de mesma magnitude e sinais opostos,  $q$  e  $-q$ , situadas em pontos diferentes, como no Ex. 1 da Seção 3.2. A *carga total* do dipolo é  $= 0$ . Se  $\mathbf{l}$  é o vetor de posição da carga positiva em relação à negativa (fig 4.8), chama-se *momento de dipolo elétrico* do dipolo o vetor

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \quad (4.4.1)$$

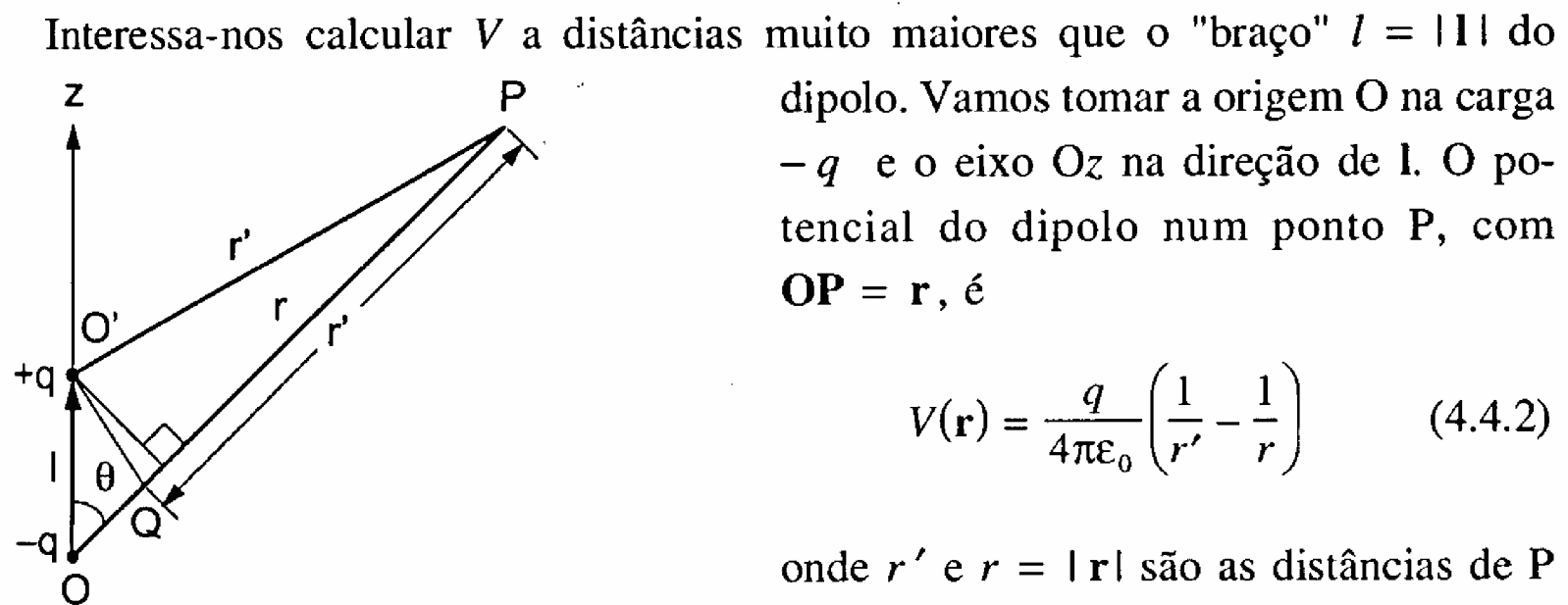


Figura 4.8 Potencial de um dipolo num ponto P distante

Interessa-nos calcular  $V$  a distâncias muito maiores que o "braço"  $l = |\mathbf{l}|$  do dipolo. Vamos tomar a origem  $O$  na carga  $-q$  e o eixo  $Oz$  na direção de  $\mathbf{l}$ . O potencial do dipolo num ponto  $P$ , com  $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ , é

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \quad (4.4.2)$$

onde  $r'$  e  $r = |\mathbf{r}|$  são as distâncias de  $P$  a  $+q$  e  $-q$ , respectivamente. Na fig. 4.8, onde  $PQ$  é o rebatimento de  $PO'$  sobre a



direção de PO, vemos que, a menos de termos de ordem superior, temos, para  $r \gg l$ ,

$$r' = r - l \cos \theta \quad (4.4.3)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e Oz. Isso vale porque OQ quase se confunde com a projeção ortogonal de OO' sobre OP. Daí decorre

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r \left(1 - \frac{l}{r} \cos \theta\right)} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{r} \cos \theta\right) = \frac{1}{r} + \frac{l \cos \theta}{r^2} \quad (4.4.4)$$

desprezando termos da ordem de  $(l/r)^2$  ou superior. Substituindo na (4.4.3), obtemos o potencial do dipolo num ponto distante:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.4.5)$$

que cai como  $(1/r)^2$  em lugar de  $1/r$  (potencial coulombiano de uma carga), devido à neutralização das contribuições de  $+q$  e  $-q$  a grande distância. Na (4.4.5),  $p \equiv |\mathbf{p}|$ .

Com  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , também podemos escrever, no sistema de eixos da fig. 4.8,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.4.6)$$

Todos esses resultados valem para  $r \gg l$ . Também se costuma definir o conceito idealizado de um "dipolo puntiforme" (como na idealização de uma "carga puntiforme"), tomando o limite em que  $l \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow \infty$ , mantendo constante o produto  $p = ql$ . Com essa interpretação, a (4.4.5) dá, para qualquer  $r \neq 0$ , o potencial de um dipolo puntiforme situado na origem.

### *Cálculo do campo*

A (4.4.6) permite calcular  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ . Como o gradiente é um operador de derivação, vale a regra da derivada de um produto:

$$\text{grad}(fg) = (\text{grad } f)g + f \text{grad } g \quad (4.4.7)$$

Logo, usando também a (4.1.15), obtemos

$$\text{grad}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} \text{grad } z + z \text{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^3} - \frac{3z}{r^4} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^3} - \frac{3\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^3} \hat{\mathbf{r}}$$

e, como  $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{z}}$ , resulta

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.4.8)$$

Em particular, para pontos do plano  $(x,y)$  (com  $z = 0$ ), temos  $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$  e a (4.4.8) fica

$$\mathbf{E}(x,y,0) = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.4.9)$$

que é antiparalelo a  $\mathbf{p}$  e coincide com o resultado da Seq. 3.2, Ex.1.

Por outro lado, para pontos ao longo do eixo  $z$  (alinhados com o dipolo), temos  $r = |z|$  e  $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$ , o que dá

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{\mathbf{p}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.4.10)$$

que tem sentido oposto à (4.4.9) e magnitude dupla.

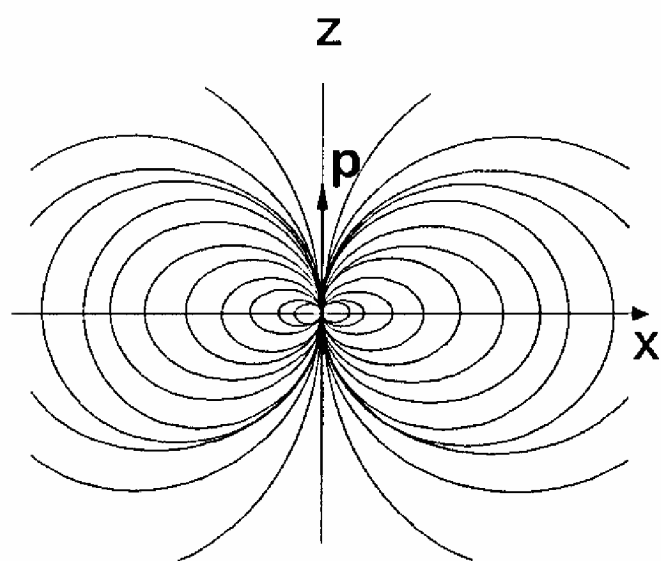


Figura 4.9 Linhas de força do campo de um dipolo  $\mathbf{p}$  na origem, alinhado com o eixo  $z$ .

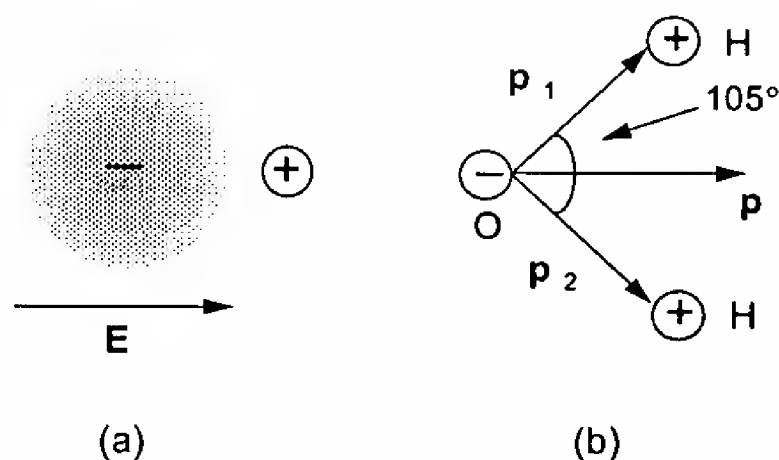


Figura 4.10 (a) Polarização da nuvem eletrônica no campo externo  $\mathbf{E}$ ; (b) Dipolo permanente da molécula de  $\text{H}_2\text{O}$

A fig. 4.9 mostra as linhas de força do campo de um dipolo puntiforme  $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$  situado na origem. Ela deve ser comparada com a fig. 3.6, na qual, porém, o dipolo é horizontal e não é puntiforme: assim as linhas de força da fig. 3.6 têm o mesmo aspecto das da fig 4.9 para distâncias muito maiores do que a separação entre as cargas.

O eixo  $Oz$  é uma particular linha de força, o que concorda com a (4.4.10); as linhas de força cruzam o plano  $xy$  na vertical, em concordância com a (4.4.9).

### *Exemplos de dipolos na escala microscópica*

Na ausência de um campo externo, a nuvem de carga associada ao elétron num átomo de hidrogênio está concentrada no próton (núcleo), e o átomo não tem momento

de dipolo elétrico permanente. Quando se aplica um campo elétrico externo  $E$ , porém, o "centro de carga" negativo da nuvem eletrônica se desloca em sentido oposto a  $E$ , e o núcleo se desloca no sentido de  $E$ : aparece um dipolo elétrico, induzido pelo campo [fig. 4.10(a)]. Dizemos que o átomo se *polariza* sob a ação de um campo externo. O mesmo acontece com átomos mais complexos e com moléculas não polares, ou seja, que não possuem momento de dipolo permanente: os "centros de carga" positiva e negativa se separam e o campo externo produz polarização (momento de dipolo elétrico).

Moléculas sem centro de simetria podem ter momentos de dipolo elétrico *permanentes*: chamam-se *moléculas polares*. Um exemplo importante é a molécula de água, em que as duas ligações O-H formam um ângulo de  $105^\circ$ . A nuvem eletrônica tende a se concentrar mais em torno do oxigênio, que se torna negativo em relação aos hidrogênios, formando dois momentos de dipolo  $p_1$  e  $p_2$  [fig. 4.10 (b)], cuja resultante  $p$  é o momento de dipolo permanente da molécula de  $H_2O$ . Seu valor é  $|p| \approx 6,2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ , compatível com as constantes atômicas: a carga típica é da ordem da do elétron,  $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , e distâncias interatômicas típicas são da ordem de  $10^{-10} \text{ m}$ .

Da mesma forma que uma distribuição superficial de cargas, também se pode ter uma *distribuição superficial de dipolos*, que se chama uma *dupla camada*. Exemplos importantes são encontrados em biologia. Assim, a membrana de uma célula é um isolante, que separa o fluido no seu interior (citoplasma) do fluido externo. Ambos são soluções salinas diluídas, em que a maioria das moléculas dissolvidas estão ionizadas. Embora os fluidos sejam neutros, a superfície interna da membrana tem um excesso de íons negativos (ânions), ao passo que a superfície externa tem um excesso de cátions (íons positivos), devido a diferenças de permeabilidade da membrana a diferentes íons. A espessura da membrana é da ordem de algumas dezenas de  $\text{\AA}$ , de modo que podemos usar, como modelo da distribuição de cargas sobre ela, uma dupla camada. Vamos ver agora como se pode calcular o potencial eletrostático de uma dupla camada.

### Potencial de dupla camada

Numa dupla camada, o momento de dipolo  $dp$  de um elemento de superfície orientado  $dS = \hat{n} dS$  tem a direção da normal  $\hat{n}$  e é proporcional a  $dS$ :

$$dp = \delta dS = \delta \hat{n} ds \equiv \delta dS \quad (4.4.11)$$

o que define as densidades superficiais escalar ( $\delta$ ) e vetorial ( $\delta$ ) de momento de dipolo elétrico.

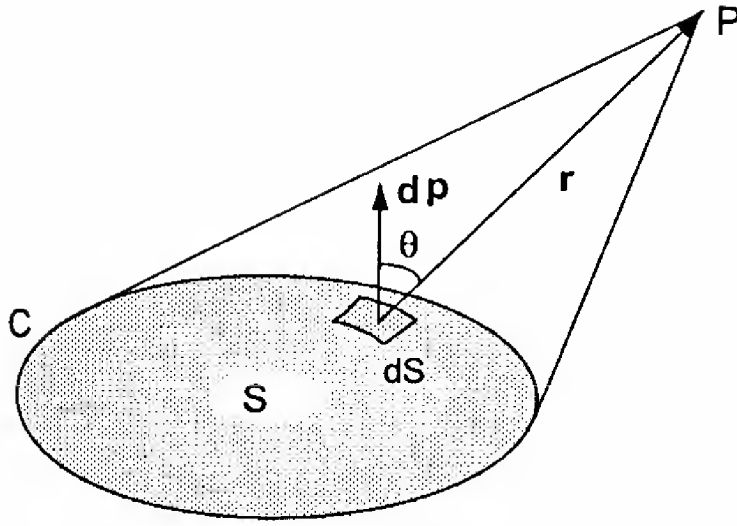


Figura 4.11 Potencial de dupla camada

Pelas (4.4.5) e (4.4.11), um elemento de superfície  $dS$  da dupla camada contribui para o potencial num ponto  $P$  com

$$dV = \frac{\mathbf{dp} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.4.12)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor de posição de  $P$  com origem em  $dS$  (fig. 4.11). Mas, pela (3.4.5),

$$\frac{d\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = d\Omega$$

é o elemento de ângulo sólido subtendido por  $dS$  em  $P$ .

Logo, para uma distribuição com densidade superficial  $\delta = \text{constante}$  sobre uma superfície  $S$ , o potencial  $V(P)$  é dado por

$$V(P) = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (4.4.13)$$

onde  $\Omega$  é o *ângulo sólido total subtendido pela dupla camada em  $P$*  (fig.4.11). O ângulo sólido  $\Omega$  só depende do *contorno  $C$*  de  $S$ : é o mesmo para qualquer superfície de contorno  $C$ .

Para pontos acima de  $S$ , para onde apontam os dipolos (do lado das cargas positivas), o ângulo  $\theta$  é agudo e  $\Omega$  é  $> 0$ ; para  $P$  abaixo de  $S$  (lado das cargas negativas),  $\theta$  é obtuso e  $\Omega < 0$ . Em particular, se  $P$  tende a um ponto  $P_+$  de  $S$  do lado positivo,  $\Omega \rightarrow 2\pi$ ; se  $P$  tende a um ponto  $P_-$  de  $S$  do lado negativo,  $\Omega \rightarrow -2\pi$ ; o que dá

$$V(P_+) = \frac{\delta}{2\epsilon_0}, \quad V(P_-) = -\frac{\delta}{2\epsilon_0} \quad (4.4.14)$$

e isto leva a

$$V(P_+) - V(P_-) = \frac{\delta}{\epsilon_0} \quad (4.4.15)$$

mostrando que *o potencial tem uma descontinuidade  $\delta/\epsilon_0$  através da dupla camada*.

No caso da membrana celular, essa diferença de potencial através dela chama-se *potencial de membrana* e é da ordem de grandeza, tipicamente, de uma centena de mV. Em células nervosas (neurônios), variações suficientemente grandes deste "potencial de repouso" desencadeiam um sinal ("potencial de ação"), cuja propagação ao longo do sistema nervoso é a base da transmissão de informações em nosso organismo.

### Forças e torques sobre dipolos em campos elétricos

#### (a) Dipolo num campo uniforme

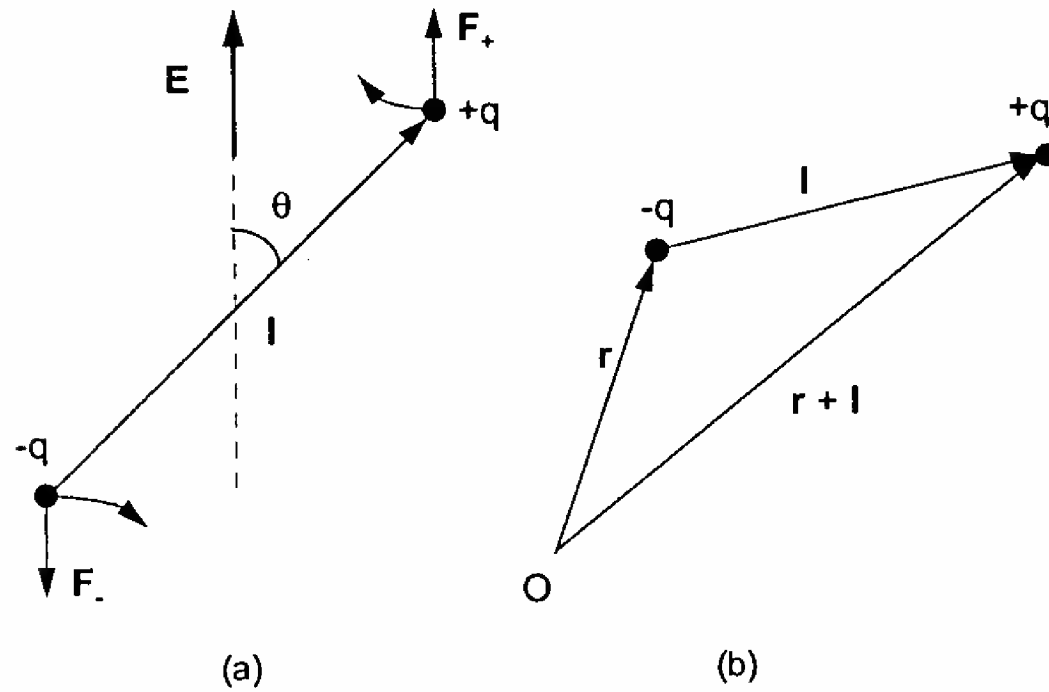


Figura 4.12 (a) Torque sobre um dipolo num campo uniforme  
(b) Energia potencial de um dipolo num campo externo

Se tivermos um dipolo num campo externo  $\mathbf{E}$  uniforme, as forças que atuam sobre as cargas  $+q$  e  $-q$ , respectivamente, são dadas por [Fig.4.12(a)]

$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} = -\mathbf{F}_- \quad (4.4.16)$$

Este par de forças forma um *binário*, cujo *torque* é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_+ = q\mathbf{l} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (\tau = pE \sin \theta) \quad (4.4.17)$$

que tende a fazer o dipolo girar até alinhar-se paralelamente a  $\mathbf{E}$ .

#### (b) Energia potencial e força num campo qualquer

Consideremos agora a energia potencial do dipolo e a força que atua sobre ele quando as cargas estão situadas em pontos  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r} + \mathbf{l}$  de um campo externo  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  qualquer, que não precisa ser uniforme [Fig.4.12 (b)]. A origem  $O$  é tomada num ponto arbitrário.

Pela definição do potencial, a energia potencial de uma carga  $q$  num ponto  $\mathbf{r}$  de um campo eletrostático externo  $\mathbf{E}$  é  $q\varphi(\mathbf{r})$ , onde  $\varphi$  é o potencial associado a  $\mathbf{E}$ . Usamos a notação  $\varphi$  para evitar confusão com o potencial  $V$  do campo *produzido* pelo dipolo. Logo, a energia potencial de um dipolo num campo externo  $\mathbf{E}$  qualquer é

$$U(\mathbf{r}) = q[\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})] \quad (4.4.18)$$

Supondo desprezíveis as dimensões do dipolo, podemos tratar  $\mathbf{l}$  como um infinitésimo e usar

$$\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{l} \cdot \text{grad } \varphi \quad (4.4.19)$$

o que dá  $U(\mathbf{r}) = q \mathbf{l} \cdot \text{grad } \varphi$ , ou seja,

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.4.20)$$

A força resultante sobre o dipolo é

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (4.4.21)$$

Num campo uniforme,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{E}$  não dependem de  $\mathbf{r}$ ; logo,  $\mathbf{F} = 0$  [mas, como vimos, existe um *torque* sobre o dipolo, dado pela (4.4.17)].

Por outro lado, se o campo *não é uniforme* (campo *inhomogêneo*), temos

$$U = -p_x E_x(\mathbf{r}) - p_y E_y(\mathbf{r}) - p_z E_z(\mathbf{r})$$

o que dá uma força não-nula sobre o dipolo (suposto fixo, isto é, com  $\mathbf{p}$  independente de  $\mathbf{r}$ ):

$$\mathbf{F} = p_x \text{grad } E_x(\mathbf{r}) + p_y \text{grad } E_y(\mathbf{r}) + p_z \text{grad } E_z(\mathbf{r}) \quad (4.4.22)$$

Por exemplo, no entorno de um ponto em que  $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{E} = E_x(x) \hat{\mathbf{x}}$ , teríamos

$$\mathbf{F} = p \frac{dE_x}{dx} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.4.23)$$

o que tem uma interpretação imediata: a força resultante sobre o par de cargas tem nesse caso a direção  $x$  e amplitude dada por

$$F_x(x+l) + F_x(x) = q[E_x(x+l) - E_x(x)] \approx ql \frac{dE_x}{dx} = p \frac{dE_x}{dx} \quad (4.4.24)$$

Vemos que o dipolo tende a se deslocar *no sentido do campo crescente* ( $dE_x/dx > 0$ ), o que decorre, no caso geral, de

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \quad (4.4.25)$$

e do que vimos: o gradiente aponta na direção do *máximo active*.

Podemos compreender agora por que um pente eletrizado atrai pedacinhos de papel (fig.4.13). Por indução, o pente polariza um fragmento de papel, criando um dipolo, que é atraído para a região de campo mais intenso na vizinhança das pontas do pente ("poder das pontas", que voltará a ser discutido mais adiante).

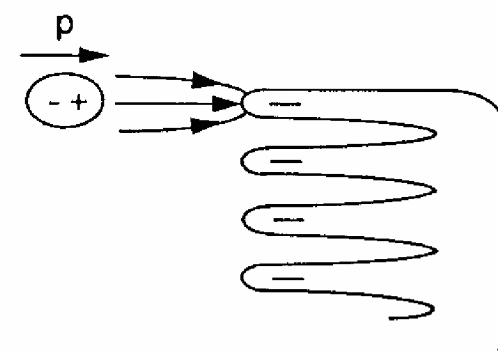


Figura 4.13 Atração de fragmento de papel por pente eletrizado

## 4.5 Circulação e o rotacional

Vimos que o caráter conservativo do campo eletrostático, que equivale à existência do potencial  $V$ , se exprime também pelo fato de que, se  $\Gamma$  é qualquer curva fechada (orientada)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.5.1)$$

ou seja, a circulação do campo elétrico ao longo de  $\Gamma$  é igual a zero.

Da mesma forma que fizemos para a lei de Gauss, vamos procurar agora uma *formulação local* desse resultado. Para isso, vamos de início recapitular resultados já vistos sobre circulação de um fluido na hidrodinâmica (*Fís.Bás.2*, Seç.2.6). Se  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidades no escoamento de um fluido, a *circulação*  $C_{\Gamma}$  do fluido ao longo da curva fechada orientada  $\Gamma$  é definida por

$$C_{\Gamma} \equiv \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.5.2)$$

*Exemplo:* Consideremos um fluido num recipiente cilíndrico em rotação rígida em torno do eixo  $z$ , com velocidade angular  $\omega$ . A velocidade num ponto  $P$  do circuito  $\Gamma$  da fig. 4.14 (círculo de raio  $\rho$  com centro no eixo) é

$$\mathbf{v}(P) = \omega \rho \hat{\phi} \quad (4.5.3)$$

o que dá, para a circulação ao longo de  $\Gamma$ ,

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \rho d\phi \hat{\phi} = \omega \rho^2 \oint d\phi = 2\omega S \quad (4.5.4)$$

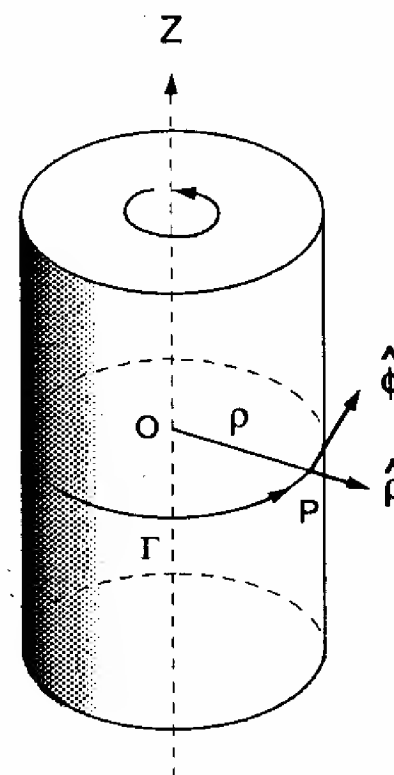


Figura 4.14 Cilindro fluido em rotação rígida

onde  $S = \pi \rho^2$  é a área contida dentro de  $\Gamma$ . Logo, a *circulação por unidade de área* para esse circuito é igual ao dobro da velocidade angular de rotação do fluido.

Vamos ver agora que esse resultado vale não só para o circuito especial tomado, mas para *qualquer circuito fechado de mesma orientação no interior do fluido*. Para isto, começamos por observar que a circulação tem uma *propriedade aditiva*: se decomposermos um circuito fechado  $\Gamma$  em dois circuitos adjacentes  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , unindo os pontos  $P$  e  $P'$  [fig.4.15(a)], a circulação ao longo de  $\Gamma$  é a soma das circulações ao longo de  $\Gamma_1$  e

$\Gamma_2$ . Com efeito, a contribuição do arco  $PP'$  se cancela, porque ele é percorrido duas vezes em sentidos opostos. Logo,

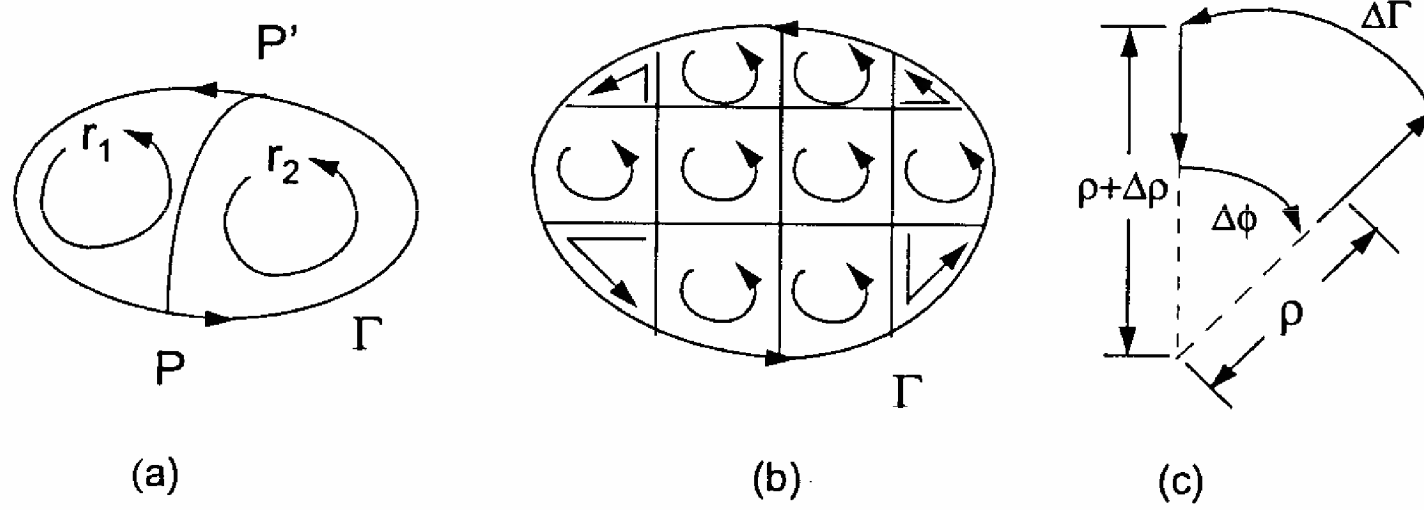


Figura 4.15 (a) Propriedade aditiva da circulação; (b) Decomposição de circuito em malhas; (c) Circuito  $\Delta\Gamma$

$$C_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2} \quad (4.5.5)$$

A fig. 4.15 (b) ilustra o fato de que qualquer circuito  $\Gamma$  pode ser decomposto em malhas arbitrariamente pequenas de mesma orientação: pela propriedade aditiva, a circulação sobre  $\Gamma$  é a soma das circulações sobre as malhas da decomposição: todas as contribuições de arcos internos se cancelam duas a duas. Logo, basta determinar a *circulação para uma malha infinitesimal*, cujo valor pode variar de ponto a ponto (propriedade local).

No exemplo do cilindro de fluido em rotação, tomando o circuito  $\Delta\Gamma$  da fig. 4.15 (c), com centro no eixo e num plano perpendicular a ele, a (4.5.3) dá

$$\begin{aligned} C_{\Delta\Gamma} &= \omega(\rho + \Delta\rho) \cdot (\rho + \Delta\rho) \Delta\phi - \omega\rho \cdot \rho \Delta\phi \\ &= \omega \Delta\phi \left[ (\rho + \Delta\rho)^2 - \rho^2 \right] \approx \omega \Delta\phi \cdot 2\rho \Delta\rho = 2\omega \cdot \Delta S \end{aligned}$$

onde  $\Delta S$  é a área contida dentro de  $\Delta\Gamma$ . Logo, para um circuito infinitesimal,

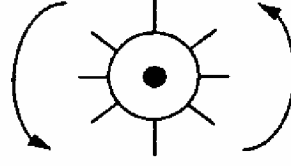
$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{C_{\Delta\Gamma}}{\Delta S} \right) = 2\omega \quad (4.5.6)$$

que tem o mesmo valor em qualquer ponto do fluido, e dá uma característica importante do escoamento (velocidade angular). Usando a propriedade aditiva, recuperamos o resultado (4.5.4) acima para um circuito finito.

Um campo de escoamento de um fluido chama-se *rotacional* ou *irrotacional*, conforme a circulação por unidade de área nos pontos do escoamento, seja  $\neq 0$  ou  $= 0$ . No primeiro caso, um elemento fluido centrado num ponto tem momento angular  $\neq 0$  em



torno dele, ou seja, gira ao mesmo tempo que é transladado pelo movimento; no segundo caso, o momento angular de cada partícula fluida em torno de seu centro é  $= 0$ .



Um detector que distingue entre os dois casos é uma rodinha de pás colocada dentro do fluido: no primeiro caso, ela gira enquanto é transportada; já no segundo, sofre translação pura, sem girar.

Para caracterizar *localmente a circulação por unidade de área*, consideremos primeiro um retângulo infinitésimo, e tomemos o plano dele como plano  $(x,y)$ , com eixos

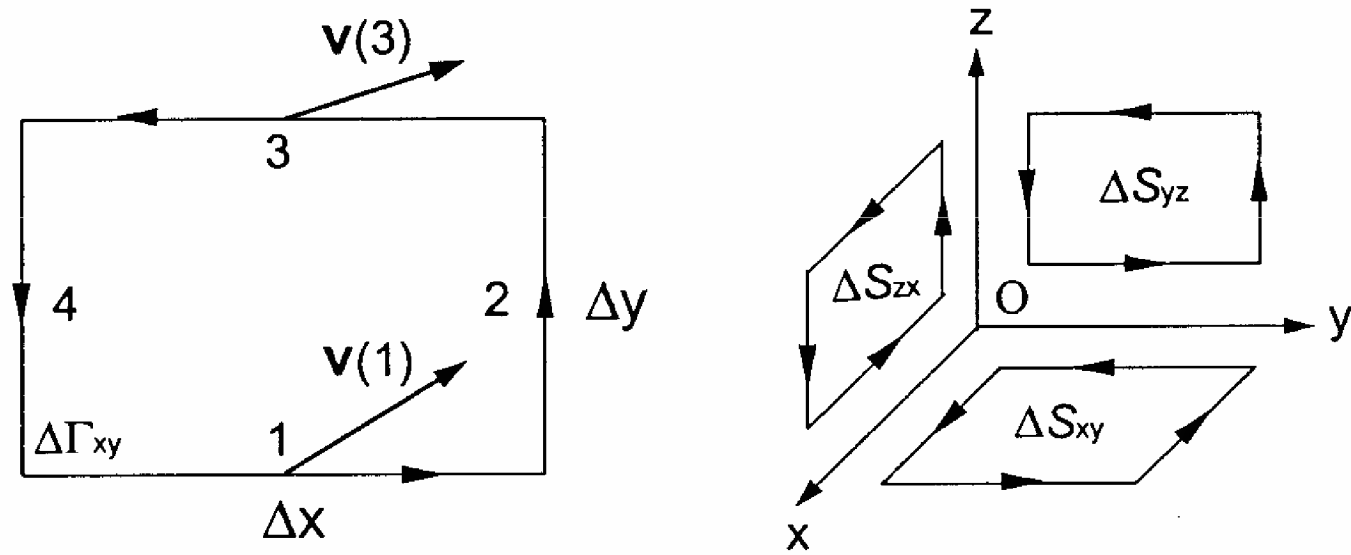


Figura 4.16 (a) Circulação sobre retângulo infinitésimo; (b) Orientações positivas de circuitos nos três planos coordenados

paralelos aos lados, de comprimentos, respectivamente,  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Com a orientação da fig. 4.16 (a),  $d\mathbf{l}$  é paralelo a  $\hat{\mathbf{x}}$  sobre o lado 1 e antiparalelo sobre o lado 3, de modo que a circulação correspondente a esses dois lados é

$$C_{(1)} + C_{(3)} = \Delta x [\mathbf{v}(1) \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}(3) \cdot \hat{\mathbf{x}}] = [v_x(1) - v_x(3)] \Delta x$$

As coordenadas em 3 diferem das em 1 por um acréscimo  $\Delta y$  infinitésimo, de forma que isto dá

$$C_{(1)} + C_{(3)} = \Delta x \left( -\frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y \right) = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta S_{xy}$$

onde  $\Delta S_{xy} = \Delta x \Delta y$  é a área do circuito retangular. Analogamente,

$$C_{(2)} + C_{(4)} = [v_y(2) - v_y(4)] \Delta y = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y = \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta S_{xy}$$

A circulação por unidade de área sobre o circuito retangular  $\Delta \Gamma_{xy}$  é então

$$\frac{C_{\Delta\Gamma_{xy}}}{\Delta S_{xy}} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (4.5.7)$$

resultados análogos valem para circuitos nos planos  $(y,z)$  e  $(z,x)$ ; as orientações são escolhidas sempre de tal forma que, vistos "de cima" dos eixos  $x,y$  ou  $z$ , os circuitos são percorridos no sentido *anti-horário* [fig. 4.16 (b)].

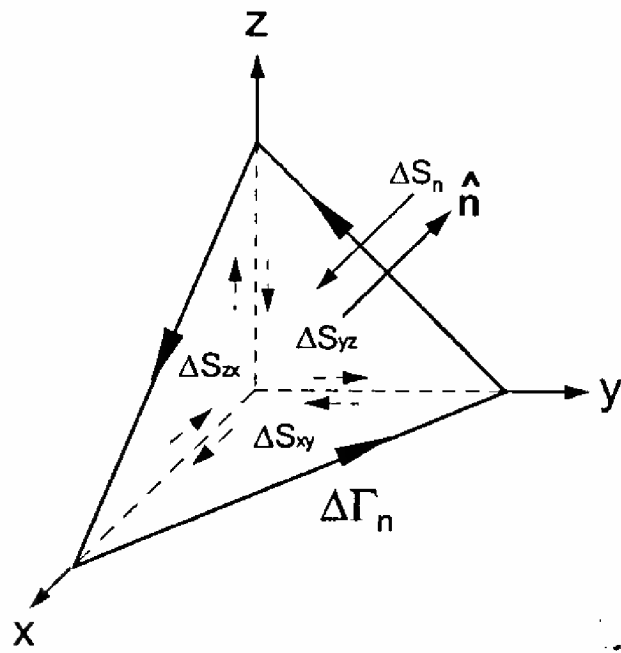
Obtemos então (verifique!)

$$\frac{C_{\Delta\Gamma_{yz}}}{\Delta S_{yz}} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{C_{\Delta\Gamma_{zx}}}{\Delta S_{zx}} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (4.5.8)$$

e resultam da (4.5.7) por permutações circulares;  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ .

Por decomposição em malhas retangulares infinitésimas, esses resultados se estendem a circuitos de forma qualquer paralelos aos três planos coordenados.

Consideremos agora um circuito orientado de forma triangular,  $\Delta\Gamma_n$ , oblíquo aos



planos coordenados, com a normal  $\hat{n}$  ao plano do triângulo orientada de tal forma que, visto da extremidade de  $\hat{n}$ , o circuito  $\Delta\Gamma_n$  é descrito no sentido anti-horário, e sejam  $\Delta S_{xy}$ ,  $\Delta S_{yz}$  e  $\Delta S_{zx}$ , as projeções de  $\Delta S_n$  (área interna a  $\Delta\Gamma_n$ ) sobre os três planos coordenados (fig. 4.17). Temos então

$$\begin{aligned} \Delta S_{xy} &= \Delta S_n \hat{n} \cdot \hat{z} \\ \Delta S_{yz} &= \Delta S_n \hat{n} \cdot \hat{x} \\ \Delta S_{zx} &= \Delta S_n \hat{n} \cdot \hat{y} \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Figura 4.17 Circuito triangular oblíquo aos eixos

Assa a área da projeção do triângulo sobre um plano é a área dele multiplicada pelo cosseno do ângulo entre as duas normais. Por outro lado,

$$C_{\Delta\Gamma_n} = C_{\Delta\Gamma_{xy}} + C_{\Delta\Gamma_{yz}} + C_{\Delta\Gamma_{zx}}$$

pois que as contribuições dos percursos sobre os eixos se cancelam duas a duas (fig. 4.17).

Substituindo nessa relação os resultados (4.5.7) a (4.5.9), resulta

$$C_{\Delta\Gamma_n} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z} \cdot \hat{n} \Delta S_n + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} \cdot \hat{n} \Delta S_n + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} \cdot \hat{n} \Delta S_n$$

seja,

$$\frac{C_{\Delta\Gamma_n}}{\Delta S_n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \quad (4.5.10)$$

é a circulação por unidade de área para orientação arbitrária (no espaço) de  $\hat{\mathbf{n}}$  e para  $\Delta\Gamma_n$  infinitésimo, onde

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (4.5.11)$$

é a expressão em coordenadas cartesianas de um *vetor* cuja definição *intrínseca* (independente da escolha das coordenadas) resulta da (4.5.10): em termos da *circulação por unidade de área para uma área infinitésima* (compare com a definição de  $\text{div } \mathbf{v}$  como fluxo por unidade de volume), temos

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \right] \quad (4.5.12)$$

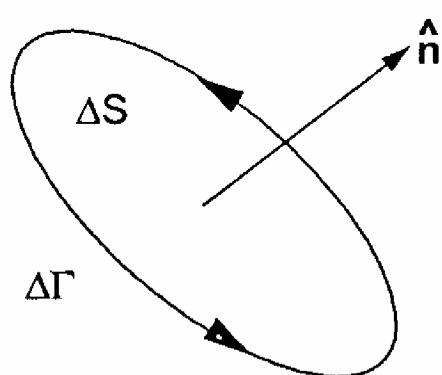


Figura 4.18 Contorno  $\Delta\Gamma$

onde  $\Delta\Gamma$  é o contorno do elemento de superfície  $\Delta S$  (fig. 4.18)

Há uma diferença sutil entre a definição de  $\hat{\mathbf{n}}$  neste caso e a da normal externa a uma superfície fechada. A orientação da normal externa não depende de uma convenção, mas a de  $\hat{\mathbf{n}}$  neste caso depende de uma *convenção de orientação*: visto a partir da extremidade

de  $\hat{\mathbf{n}}$ , o contorno  $\Delta\Gamma$  é percorrido no sentido anti-horário. Como vimos no curso de Mecânica (*Física Básica 1*), isso implica que  $\text{rot } \mathbf{v}$  é um *vetor axial* (o sentido de  $\text{rot } \mathbf{v}$  depende de uma convenção de orientação, como o sentido do produto vetorial).

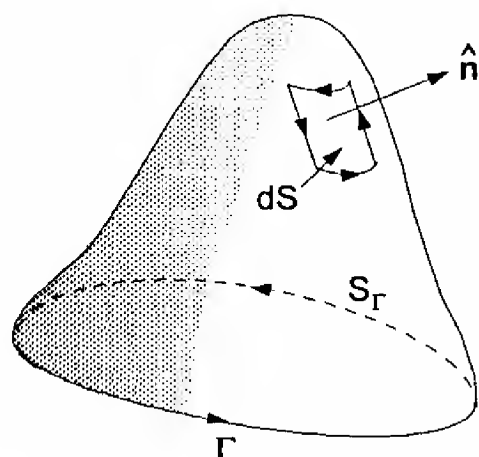
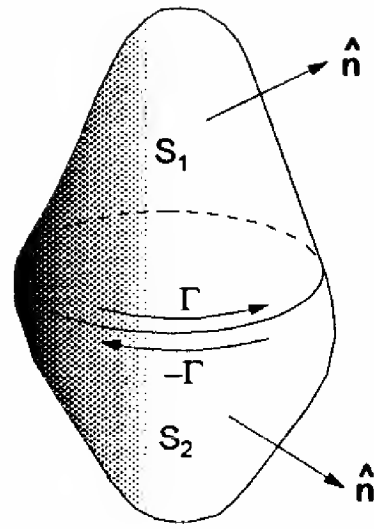


Figura 4.19 Superfície  $S_r$  de contorno  $\Gamma$ .

Decompondo uma superfície qualquer em elementos de superfície, e lembrando que a soma das circulações em torno dos elementos da malha assim formada (todas de mesma orientação) é a circulação em torno do contorno da malha, obtemos o *teorema de Stokes*

$$\int_{S_r} \hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dS = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.5.13)$$

onde  $S_r$  é *qualquer* superfície (não necessariamente plana) de contorno  $\Gamma$  (fig. 4.19).

Figura 4.20 Superfícies  $S_1$  e  $S_2$  de contorno comum  $\Gamma$ .

Se  $S_1$  e  $S_2$  são duas superfícies diferentes que se apoiam sobre  $\Gamma$  em semi-espacos opostos, temos então

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

$$\oint_{-\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

onde  $(-\Gamma)$  é  $\Gamma$  percorrido em sentido oposto. Logo,

$$\int_{S_1} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\int_{S_2} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \left\{ \int_{S_1+S_2} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \right.$$

Mas  $S_1 + S_2$  é uma superfície fechada  $S$ , cuja normal externa é  $\hat{\mathbf{n}}$ . Logo,

$$\int_{S_1+S_2} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) dv = 0$$

qualquer que seja o volume  $V$  (volume dentro de  $S$ ), o que só é possível se

$$\boxed{\text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0} \quad (4.5.14)$$

para qualquer vetor  $\mathbf{v}$ . Isto também decorre das definições em termos de componentes cartesianas (verifique!).

Por outro lado, vimos que o anulamento da circulação,

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

para todo circuito  $\Gamma$  numa região, é a condição necessária e suficiente para que  $\mathbf{v}$  "derive de um potencial  $\phi$ ", ou seja,

$$\boxed{\mathbf{v} = \text{grad } \phi} \quad (4.5.15)$$

Logo, para qualquer função escalar  $\phi$ , vale a identidade

$$\boxed{\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0} \quad (4.5.16)$$

Novamente, isto também decorre das expressões em termos das componentes cartesianas (verifique!).

*Exemplo:* Pela (4.1.15),

$$\text{grad } r = \hat{\mathbf{r}}$$

Logo, deve ser (verifique!)

$$\text{rot } \hat{\mathbf{r}} = 0$$

*O operador  $\nabla$*

É definido por

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.5.17)$$

(lê-se "del"). Operando sobre uma função escalar  $f$ ,

$$\nabla f = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z} = \text{grad } f \quad (4.5.18)$$

O produto escalar com um vetor  $\mathbf{v}$  é

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z = \text{div } \mathbf{v} \quad (4.5.19)$$

Finalmente,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{v} \quad (4.5.20)$$

que é um vetor axial, como o produto vetorial.

Para qualquer função escalar  $f$  e qualquer vetor  $\mathbf{v}$ , temos as identidades

$$\text{rot } (\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = 0 \quad (4.5.21)$$

$$\text{div } (\text{rot } \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (4.5.22)$$

Como  $\nabla$  é um *operador diferencial* (como  $d/dx$ ), quando é aplicado a um *produto de fatores*, vale a regra de Leibnitz, ou seja, o resultado é a soma de  $\nabla$  aplicada a *cada* fator, *mantendo os outros constantes*, o que indicamos pelo índice  $c$ :

$$\nabla(fg) = \nabla(f_c g) + \nabla(f g_c) = f \nabla g + g \nabla f$$

ou seja,

$$\text{grad}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f \quad (4.5.23)$$

Analogamente,

$$\text{div}(fv) = f \text{ div } v + v \cdot \text{grad } f \quad (4.5.24)$$

$$\text{rot}(fv) = f \text{ rot } v + \text{grad } f \times v \quad (4.5.25)$$

$$\text{div}(u \times v) = v \cdot \text{rot } u - u \cdot \text{rot } v \quad (4.5.26)$$

A demonstração dessas identidades será deixada como problema.

## 4.6 A forma local das equações da eletrostática

Já vimos que a forma *local* da lei de Gauss é a equação de Poisson para E,

$$\text{div } E = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{II}) \quad (4.6.1)$$

Vemos agora que a forma local da expressão da existência do potencial ( $E = -\text{grad } V =$  campo conservativo) é

$$\text{rot } E = 0 \quad (\text{I}) \quad (4.6.2)$$

As equações (I) e (II) para E são as *equações locais do campo eletrostático*, caso particular das *equações de Maxwell* correspondente à eletrostática, descrevendo o campo gerado *no vácuo* por distribuições de cargas estáticas ( $\rho =$  densidade volumétrica de carga).

Há uma formulação equivalente em termos do potencial eletrostático V. Da (I),

$$E = -\text{grad } V \quad (\text{I}') \quad (4.6.3)$$

Substituindo na (II), obtemos

$$\text{div}(\text{grad } V) = -\rho / \epsilon_0$$

onde

$$\text{div}(\text{grad } V) = \nabla \cdot (\nabla V) \equiv \nabla^2 V \equiv \Delta V \quad (4.6.4)$$

define o *operador Laplaciano*

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.6.5)$$

Resulta a *equação de Poisson* para  $V$ ,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{II}') \quad (4.6.6)$$

Em particular, num ponto onde não há cargas,

$$\rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0 \quad (4.6.7)$$

que é a *equação de Laplace* para  $V$ .

Combinando os resultados já expostos sobre as interpretações físicas de  $\text{div}$  e  $\text{grad}$ , obtemos a

### *Interpretação física do laplaciano*

Vimos que  $\text{div } \mathbf{v} < 0$  num ponto  $P$  implica em ter  $P$  o carácter de um "sorvedouro" de linhas de campo de  $\mathbf{v}$  [fig. 3.25(b)].

Tomando  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ , concluímos então que  $\text{div } \mathbf{v} = \Delta \varphi$  é  $< 0$  em  $P$  quando  $P$  se comporta como um sorvedouro de linhas de campo de  $\text{grad } \varphi$ .

Mas sabemos que  $\text{grad } \varphi$  aponta para a direcção de *máximo aclave* para  $\varphi$ . Logo,  $\Delta \varphi(P) < 0$  significa que existe em  $P$  uma *concentração do campo escalar*  $\varphi$ , ou seja, que  $\varphi(P)$  é maior que a média de  $\varphi$  em pontos vizinhos, por exemplo, a média sobre uma esfera de raio  $R$  suficientemente pequeno com centro em  $P$ , que designaremos por  $M_R(\varphi, P)$ :

$$\varphi(P) > M_R(\varphi, P) \quad (\text{concentração de } \varphi \text{ em } P) \equiv \Delta \varphi(P) < 0 \quad (4.6.8)$$

Analogamente,

$$\Delta \varphi(P) > 0 \equiv \text{rarefação de } \varphi \text{ em } P \equiv \varphi(P) < M_R(\varphi, P) \quad (4.6.9)$$

Pela equação de Poisson,  $\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0$ , o 1.º caso (*concentração*) ocorre quando existe em  $P$  uma densidade de carga *positiva*,  $\rho > 0$ ; o 2.º (*rarefação* de  $\varphi$  em  $P$ ), quando  $\rho(P) < 0$ . A *equação de condução do calor*, que governa a distribuição (campo) de temperaturas num meio condutor de calor (como uma barra metálica) é

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T \quad (K > 0) \quad (4.6.10)$$

onde  $T(P)$  é a temperatura e  $t$  o tempo. Assim, se  $\Delta T < 0$  em  $P$ , existe em  $P$  uma concentração de temperatura, e  $\partial T / \partial t < 0$ , ou seja, a temperatura em  $P$  tende a *diminuir*

com o tempo; se  $\Delta T > 0$  (rarefação de  $T$  em  $P$ ),  $T(P)$  tenderá a *aumentar* com  $t$ . A condução do calor é um processo de *uniformização* da temperatura (analogamente para a *difusão*).

Por outro lado, se  $\Delta\varphi(P) = 0$ ,  $\varphi$  não tem nem concentração nem rarefação em  $P$

$$\Delta\varphi(P) = 0 \quad \equiv \quad \varphi(P) = M_R(\varphi, P) \quad (4.6.11)$$

Em particular,  $V$  não pode ter máximos nem mínimos numa região onde não há cargas ( $\rho = 0$ ): se cresce em certas direções, a partir de  $P$ , tem de decrescer em outras.

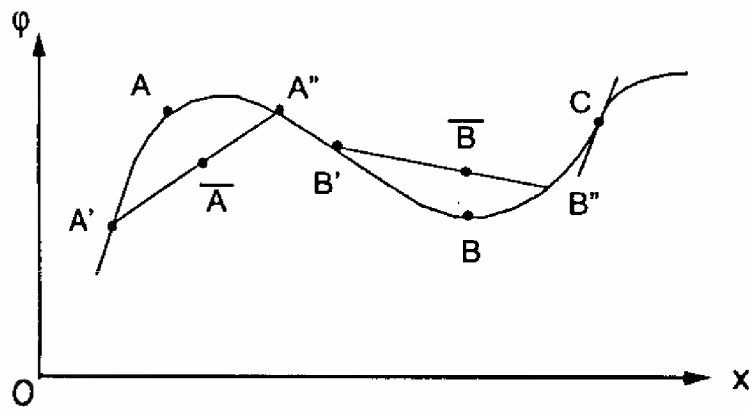


Figura 4.21 Curvatura em diferentes pontos de uma curva.

Isso corresponde ao *teorema de Earnshaw* da Seção 3.4. Em uma dimensão,  $\partial^2 \varphi / \partial x^2$  mede a *curvatura* do gráfico de  $\varphi(x)$  (fig. 4.21). Em  $A$ ,  $\partial^2 \varphi / \partial x^2 < 0$  e a curva está *acima* da corda  $A'A''$  que une pontos vizinhos (bem como do valor médio  $\bar{A}$ ); em  $B$ ,  $\partial^2 \varphi / \partial x^2 > 0$ , e a curva está *abaixo* da corda  $B'B''$  e do valor médio  $\bar{B}$ . No ponto  $C$ ,  $\partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$  (ponto de inflexão: acima de um lado, abaixo do outro).

## 4.7 Potencial de condutores

Como vimos, em qualquer ponto interno de um condutor, tem de ser  $E = 0$ . Logo, se 1 e 2 são dois pontos internos,

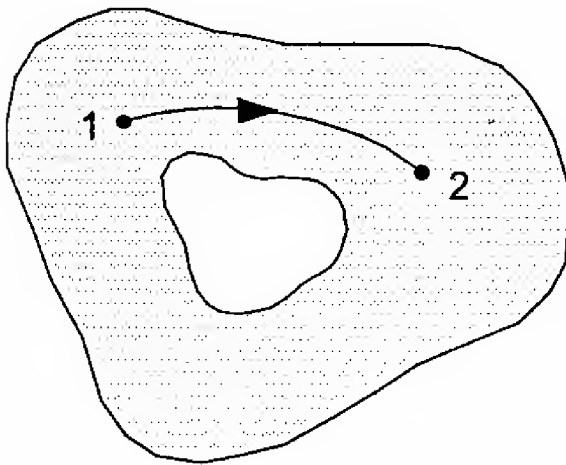


Figura 4.22 Caminho de 1 a 2 todo interno a um condutor

$$V(2) - V(1) = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

tomando um caminho todo interno ao condutor (fig. 4.22).

Logo,

$$V(1) = V(2) = \text{Constante} \quad (4.7.1)$$

O *volume* do condutor é portanto um *volume* equipotencial. Em particular, sua superfície externa é uma superfície equipotencial, o que concorda com o fato já visto de que as linhas de força têm de ser ortogonais a ela ( $E_{\text{tang}} = 0$  na superfície).



Consideremos em particular um *condutor oco*, ou seja, com uma cavidade interna, e suponhamos também que não exista carga dentro da cavidade.

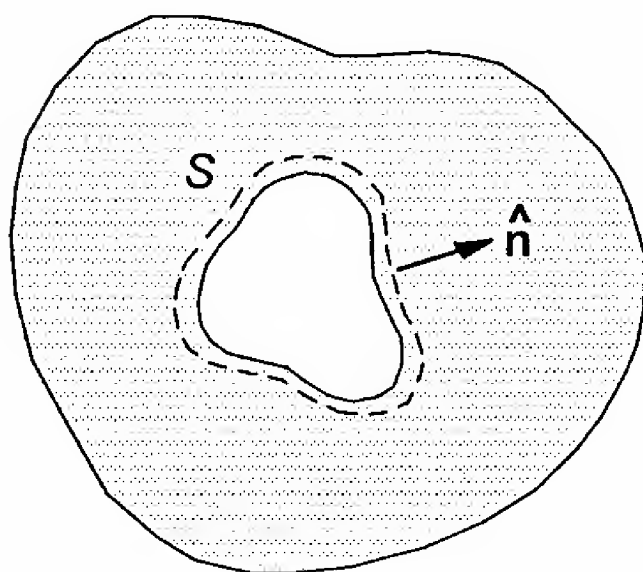


Figura 4.23 Condutor oco e superfície gaussiana  $S$

Se tomarmos então uma superfície gaussiana  $S$  coincidente com a superfície interna do condutor, que limita a cavidade (fig. 4.23), teremos

$$\Phi_S = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (4.7.2)$$

mas isto não significa que não poderia existir uma distribuição de carga superficial sobre  $S$ . Bastaria que sua densidade  $\sigma$  fosse compatível com carga *total* sobre  $S = 0$ .

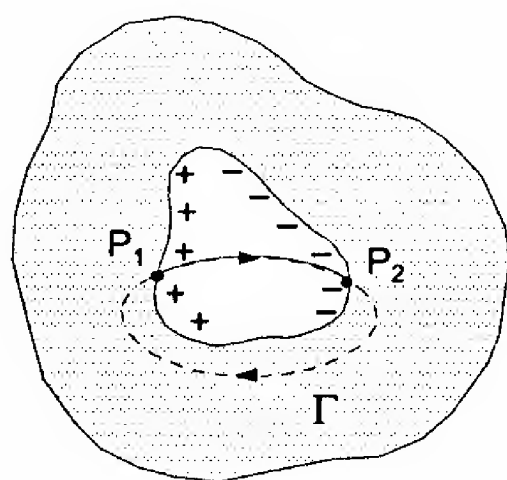


Figura 4.24 O circuito  $\Gamma$

Teria de haver então cargas + em algumas partes de  $S$  e – em outras partes. Linhas de força teriam de iniciar-se em cargas + nas paredes e terminar em cargas – (com  $\mathbf{E} \neq 0$  dentro da cavidade). Mas se completássemos uma tal linha formando um circuito fechado  $\Gamma$ , com a parte adicional passando por dentro do condutor (onde  $\mathbf{E} = 0$ ), teríamos (fig. 4.24)

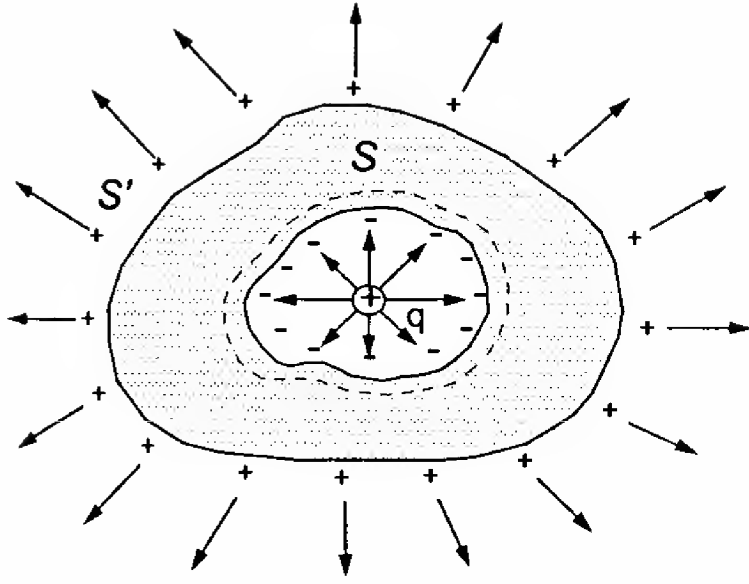
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

porque  $d\mathbf{l} \parallel \mathbf{E}$  sobre a linha de força. Isso contradiria a relação básica (4.5.1). Logo,

- (i) *Se não há cargas dentro da cavidade, não pode haver cargas na superfície interna;*
- (ii)  *$\mathbf{E} = 0$  não só no interior do material condutor, mas também em toda a cavidade.*

Vemos assim que o resultado (ii) vale não só para uma cavidade esférica (caso considerado por Newton na gravitação), mas também para uma cavidade de forma qualquer. Ele vale quaisquer que sejam os campos eletrostáticos na região *externa* ao condutor, ou seja, a cavidade é *blindada* da ação de campos externos.

Suponhamos agora que a carga puntiforme  $q$  está *dentro* da cavidade, mas *isolada* (sem contato condutor com as paredes), e que o condutor tem carga total = 0, ou seja, está descarregado.

Figura 4.25 Condutor oco contendo carga  $q$ 

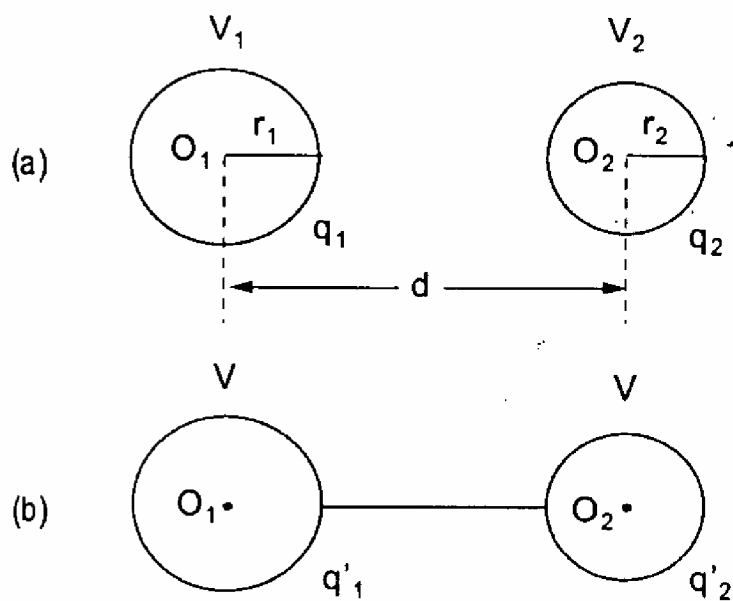
como um fenômeno de indução eletrostática. Se já existe uma carga inicial  $+Q$  no condutor, ela fica distribuída na superfície externa e seu fluxo se *superpõe* ao da carga  $+q$ .

### Contato entre condutores

Consideremos duas esferas condutoras de raios  $r_1$  e  $r_2$  cujos centros distam de uma distância  $d \gg (r_1, r_2)$ . Se ambas estão inicialmente isoladas [fig. 4.26(a)] e têm cargas  $q_1$  e  $q_2$ , respectivamente, seus potenciais são, com boa aproximação (desprezando termos  $q_i/d$  em confronto com  $q_i/r_i$ )

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{d} \right) \approx \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_1}{d} \right) \approx \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

Figura 4.26 Esferas condutoras carregadas  
(a) isoladas; (b) ligadas

Se agora ligarmos as duas esferas por um fio condutor *muito fino* [fig. 4.26(b)], elas formarão um condutor único, que tem de estar todo no mesmo potencial  $V$ . Nessas condições, a carga total  $q \equiv q_1 + q_2$  se redistribui entre eles, com cargas  $q'_1$  e  $q'_2$  em cada um. Desprezando a contribuição de cada condutor ao potencial do outro e a perturbação do fio, teremos, então, aproximadamente

$$V \approx \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \approx \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{q'_1}{q'_2} \approx \frac{r_1}{r_2} \end{array} \right.$$

$$q = q'_1 + q'_2 = q'_1 \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} q'_1 \approx \frac{qr_1}{r_1 + r_2} \quad ; \quad q'_2 \approx \frac{qr_2}{r_1 + r_2} \end{array} \right.$$

As densidades superficiais de carga são dadas por

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{q'_1}{4\pi r_1^2} \\ \sigma_2 &= \frac{q'_2}{4\pi r_2^2} \end{aligned} \right\} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q'_1}{q'_2} \cdot \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} &\approx \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \right. \quad (4.7.3)$$

Logo, a densidade de carga é inversamente proporcional ao raio de curvatura da superfície condutora.

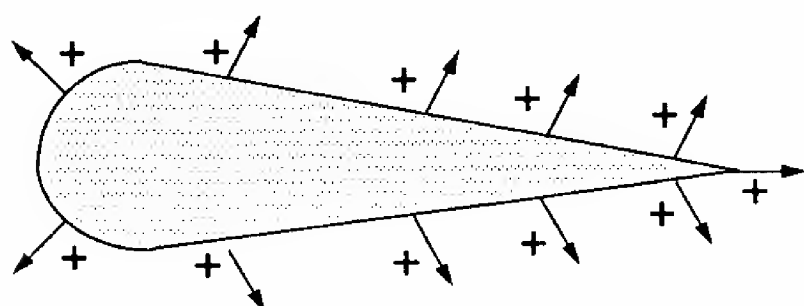


Figura 4.27 Poder das pontas

Por outro lado, o campo na superfície do condutor é dado por  $\sigma/\epsilon_0$ , de forma que a mesma distribuição vale para o campo. Isso explica o *poder das pontas*: o campo elétrico torna-se mais intenso na vizinhança de uma ponta, onde o raio de curvatura do condutor diminui (fig. 4.27).

Na atmosfera existem normalmente íons (átomos ou moléculas são ionizados pela radioatividade natural do solo e por raios cósmicos). O campo intenso no ar perto de uma ponta atrai íons de carga oposta e repele os de mesmo sinal; a aceleração que adquirem pode ser suficiente para produzir outros íons por colisão, desencadeando um processo de avalanche, que tende a descarregar o condutor; pode produzir luminosidade ("efeito corona") ou até faíscas.

A *rigidez dielétrica do ar* (campo máximo que pode subsistir na atmosfera sem produzir descarga) é da ordem de  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ .

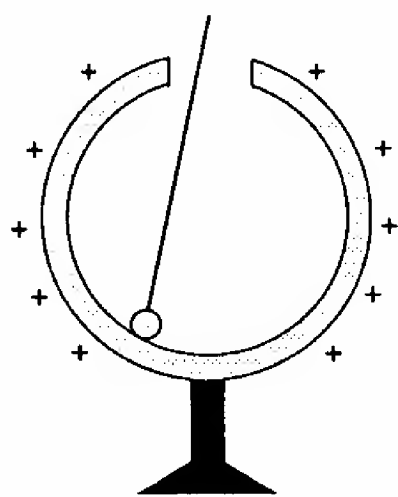


Figura 4.28 Experiência de Priestley

O fato de que não há cargas na parede interna de um condutor oco carregado foi observado por B. Franklin em 1755, suspendendo um pedacinho de rolha por um fio de seda e colocando-o dentro de uma lata carregada (fig. 4.28), e foi por ele transmitido a Joseph Priestley, que, lembrando-se do resultado dos "Principia" e tendo repetido a experiência em 1766, concluiu no ano seguinte que a interação

eletrostática devia ser proporcional a  $r^{-2}$ , como a gravitacional.

Cavendish redescobriu esse argumento em 1773, 12 anos antes das experiências de Coulomb. Vimos que os resultados numa cavidade dentro de um condutor decorrem diretamente de  $n=2$  numa lei em  $r^{-n}$ . Maxwell, repetindo a experiência em 1873 com maior precisão, concluiu que  $|n-2| < 5 \times 10^{-5}$ ; Plimpton e Lawton, em 1936, obtiveram  $|n-2| < 2 \times 10^{-9}$ , e experiências mais recentes reduziram a diferença a valores  $\leq 10^{-16}$ !

Uma forma equivalente de enunciar esse resultado, na eletrodinâmica quântica, é dizendo que a "a massa de repouso" do fóton é  $= 0$ . Sabemos atualmente que essa massa é  $< 5 \times 10^{-60} \text{ g}$  !

Se introduzirmos uma carga  $q$  dentro da cavidade, como vimos, aparecem cargas  $-q$  e  $q$  nas superfícies interna e externa, respectivamente. Se tocarmos a parede interna com a carga  $q$ , ela neutraliza a carga  $-q$ , e o efeito global é o mesmo que o de *transferir*  $q$  ao condutor. Isso vale qualquer que seja a carga  $Q$  já existente no condutor.

Essa é a base do funcionamento do *gerador eletrostático de van de Graaff* (em lugar de tocar a parede, a transferência da carga se dá pelo efeito corona). É o que permite elevar gradualmente o potencial do terminal do gerador, que acaba sendo limitado apenas pela rigidez dielétrica da atmosfera que o envolve (nitrogênio sob pressão, no caso do "tandem"). Atingem-se assim potenciais da ordem de 10 a 20 MV no terminal. Um gerador "tandem" desse tipo funciona na Universidade de São Paulo.

## 4.8 Energia eletrostática

Para estabelecer uma determinada configuração de cargas, é preciso realizar trabalho contra as forças elétricas entre as cargas (por exemplo, se tiverem todas o mesmo sinal, elas se repelem). Pela conservação da energia, esse trabalho deve ficar armazenado na configuração. Aonde?

A resposta é diferente conforme adotemos o ponto de vista da ação à distância ou o ponto de vista do campo. Do ponto de vista da ação à distância, a energia permanece armazenada *nas cargas*, sob a forma de *energia potencial* de interação entre elas. Veremos na Seq. 5.5 que, do outro ponto de vista, a energia fica armazenada *no campo*, ou seja, em todo o espaço onde existe campo. Esses pontos de vista são equivalentes na eletrostática (mas não na eletrodinâmica!).

### Cálculo da energia potencial

Para uma carga puntiforme  $q$  num ponto  $x$  de um campo *preestabelecido* de potencial  $V(x)$ , sabemos que a energia potencial é

$$U(x) = qV(x)$$

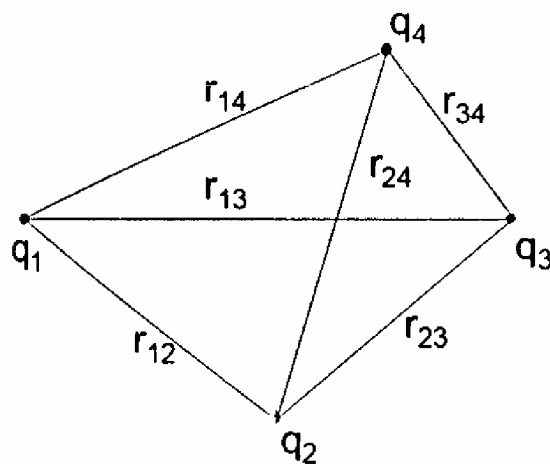


Figura 4.29 Configuração de cargas

Para obter  $U$  associado a uma configuração de cargas puntiformes (fig. 4.29), temos de levar em conta que a presença de cada carga muda o campo sobre as outras. Para isso imaginamos trazer as cargas sucessivamente uma a uma, do infinito (onde o potencial é nulo) para a posição que vão ocupar. Os resultados são os seguintes:

Carga	Posição	Trabalho necessário
$q_1$	$\mathbf{x}_1$	0
$q_2$	$\mathbf{x}_2$	$\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}}$
$q_3$	$\mathbf{x}_3$	$\frac{q_3}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$
$q_4$	$\mathbf{x}_4$	$\frac{q_4}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right)$

e assim por diante (se houver mais cargas), onde  $r_{ij}$  é a distância entre  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$ .

Logo, a energia potencial da configuração é

$$U = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \quad (4.8.1)$$

que é a soma de todas as interações entre *pares* de cargas. Na segunda somatória, cada par é contado duas vezes: daí o fator 1/2.

Também podemos escrever este resultado como

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ji}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (4.8.2)$$

onde  $V_i$  é o potencial *na posição da carga  $i$* , devido a todas as demais cargas. A generalização a uma distribuição contínua é

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dv \quad (4.8.3)$$

*Exemplo:* Uma esfera de raio  $R$  uniformemente carregada, com densidade volumétrica  $\rho$ , pode ser "construída" como uma cebola, por cascas sucessivas (fig. 4.30). Para uma casca,

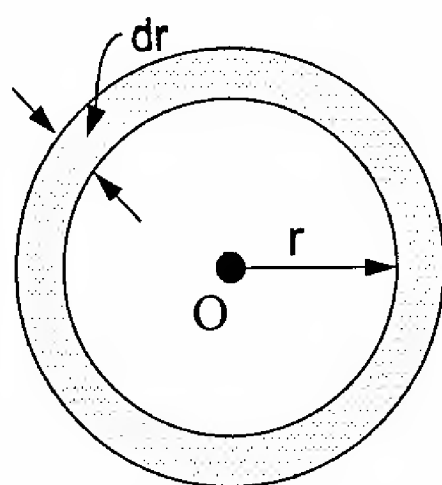


Figura 4.30 Contribuição de uma casca esférica.

$$dU = \frac{q(r) dq}{4\pi \epsilon_0 r} = dq V(r)$$

onde  $V(r)$  é o potencial da carga  $q(r)$ , concentrada no centro da esfera. Como

$$q(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

resulta:

$$dq = 4\pi r^2 dr \cdot \rho$$

$$dU(r) = \frac{4\pi r^2 \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{4\pi \epsilon_0 r} dr = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho^2}{\epsilon_0} r^4 dr$$

o que dá

$$U = \int_0^R dU(r) = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho^2}{\epsilon_0} \cdot \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho^2}{\epsilon_0} \frac{R^5}{5}$$

ou seja,

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{4\pi \rho^2}{15\epsilon_0} R^5 \\ \rho &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \left\{ \rho^2 = \frac{9Q^2}{(4\pi)^2 R^6} \right\} \end{aligned} \right\} \boxed{U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}} \quad (4.8.4)$$

onde  $Q$  é a carga total da esfera.

Uma aplicação desse resultado à fissão nuclear aparece no Problema 8.

## PROBLEMAS

1. Um par de cargas puntiformes  $+2q$  e  $-q$  estão separadas por uma distância  $l$ . Mostre que a superfície equipotencial  $V = 0$  é uma esfera e determine o seu centro e raio.
2. Uma esfera de raio  $R$  está uniformemente carregada, com carga total  $q$ . (a) Determine o potencial  $V$  em pontos internos e externos à esfera e trace um gráfico de  $V$  em função da distância ao centro. (b) Tomando  $q = -e$ , com uma carga puntiforme  $+e$  no centro da esfera como modelo para o átomo de hidrogênio, qual é a expressão do potencial neste caso?
3. Determine a energia potencial  $U(\mathbf{r})$  de uma carga puntiforme  $q$  num ponto  $\mathbf{r}$  de um campo eletrostático uniforme  $\mathbf{E}$ .
4. Uma carga puntiforme  $q$  encontra-se no prolongamento do eixo de um dipolo de momento  $\mathbf{p}$ , a uma distância  $z$  do dipolo muito maior que as dimensões do mesmo. (a) Calcule a energia potencial da carga no campo eletrostático do dipolo. (b) Calcule a força exercida pela carga sobre o dipolo. (c) A molécula de HCl é polar, com momento de dipolo permanente de  $3,48 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . Com que força atua sobre um elétron alinhado com ela, a uma distância de  $10\text{\AA}$ ? A força é atrativa ou repulsiva?

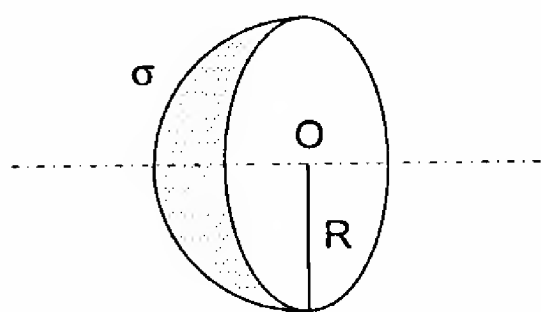
5. Calcule a energia potencial de interação entre dois dipolos  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$ , sendo  $\mathbf{r}$  o vetor de posição de  $\mathbf{p}_2$  em relação a  $\mathbf{p}_1$  (com  $|\mathbf{r}|$  muito maior que as dimensões dos dipolos). (a) Obtenha o resultado geral. (b) Particularize para dipolos alinhados com  $\mathbf{r}$ , paralelos ou antiparalelos. (c) Particularize para dipolos perpendiculares a  $\mathbf{r}$ , paralelos ou antiparalelos. Qual das quatro situações em (b) e (c) é energeticamente favorecida? (d) Nesse caso mais favorecido, calcule a energia de interação dipolar entre duas moléculas de água à distância de 5 Å uma da outra e compare-a com a energia térmica  $kT$  à temperatura ambiente. O momento de dipolo elétrico permanente de uma molécula de água é de  $6,2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ .

6. Em suas célebres experiências de 1906 que levaram à descoberta do núcleo atômico, Rutherford bombardeou uma fina folha de ouro (número atômico 79) com partículas  $\alpha$  (núcleos de He, de carga  $2e$ ), produzidas por uma fonte radioativa, e observou que algumas delas chegavam a ser defletidas para trás. A energia cinética inicial das  $\alpha$  era de 7,68 MeV. Considere uma colisão frontal entre uma partícula  $\alpha$  e um núcleo de ouro, na qual ela é retroespalhada. Qual é a distância de mínima aproximação entre as duas partículas carregadas? Rutherford estimou que o raio do núcleo deveria ser da ordem dessa distância.

7. No modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio (Cap. 2, Probl. 3), calcule: (a) a razão da energia potencial eletrostática do elétron a sua energia cinética; (b) a energia necessária para ionizar o átomo, em elétron-volts.

8. Uma gota líquida de raio  $R$ , uniformemente carregada com carga  $Q$ , divide-se em duas, de raios e cargas iguais, que se separam e se afastam até ficar a grande distância uma da outra. (a) Qual é a variação da energia potencial eletrostática nesse processo? (b) Se adotássemos esse modelo para a fissão do  $\text{U}^{235}$ , admitindo que ele pudesse se fissionar dessa forma, qual seria a energia liberada na fissão, em MeV? Calcule o raio do núcleo pela fórmula:  $R \approx 1,3 \times A^{1/3} \text{ F}$ , onde 1F (fermi) =  $10^{-13} \text{ cm}$  e  $A$  é o número de massa (n.º de protons + n.º de nêutrons).

9. Demonstre as identidades (4.5.24) a (4.5.26).



10. Uma casca hemisférica de raio  $R$  está uniformemente carregada com carga positiva de densidade superficial  $\sigma$ .

(a) Ache o potencial  $V(O)$  no ponto central  $O$  [tomando  $V(\infty) = 0$ ]

(b) Uma partícula de massa  $m$  e carga  $q$  positiva é colocada no ponto  $O$  e largada a partir do repouso. A que velocidade a partícula tenderá quando se afastar muito de  $O$ ?

11. Um balão de borracha de raio  $R$  está carregado com carga  $Q$ , distribuída uniformemente sobre sua superfície.

(a) Determine a energia eletrostática total contida no campo.

(b) Calculando a variação dessa energia para uma variação infinitesimal  $dR$  do raio, demonstre que a força eletrostática radial por unidade de área, na superfície do balão, é igual à densidade de energia eletrostática na superfície.

# 5

## CAPACITÂNCIA E CAPACITORES. DIELÉTRICOS

Em 1746, o físico holandês Pieter van Musschenbroek, professor em Leiden, estava tentando introduzir carga elétrica na água de um recipiente, ligada a um cano metálico carregado, através de um fio de cobre mergulhado na água. Um estudante estava segurando o recipiente, enquanto Pieter carregava o cilindro por atrito. Quando o estudante esbarrou no cano com a outra mão, levou um violento choque! Repetiram a experiência, trocando de papéis, e Pieter levou um choque ainda maior (o estudante se desforrou...).

Assim foi descoberta a "garrafa de Leiden", o primeiro capacitor (ou "condensador"), capaz de armazenar carga elétrica.

### 5.1 Capacitor plano

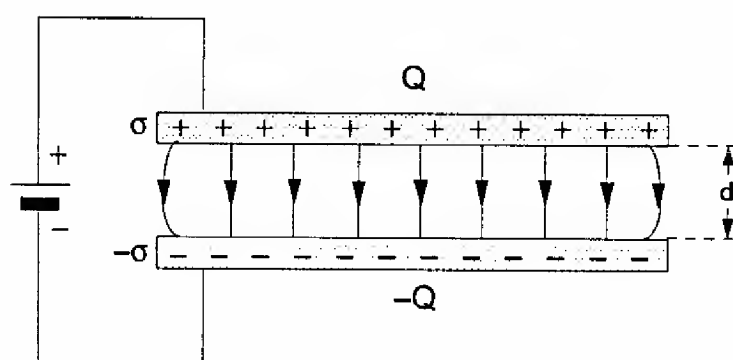


Figura 5.1 Capacitor plano

tos, desprezando os "efeitos de beirada" nas bordas dos planos.

Consideremos um par de placas metálicas planas paralelas carregadas com cargas  $+Q$  e  $-Q$ , respectivamente (fig. 5.1), por exemplo, por estarem ligadas aos terminais de uma bateria, conforme veremos no cap. 6. Se a distância  $d$  entre as placas é muito menor que as dimensões das placas, podemos tratá-las, em primeira aproximação, como se fossem planos infinitos, desprezando os "efeitos de beirada" nas bordas dos planos.



Sabemos então (superposição dos campos das duas placas) que o campo elétrico entre as placas pode ser considerado como *uniforme* com

$$E = |\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad (5.1.1)$$

onde  $A$  é a área das placas.

A *diferença de potencial*  $V$  entre as placas é

$$V \equiv V_+ - V_- = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E d \quad (5.1.2)$$

pois  $\mathbf{E}$  aponta no sentido da placa positiva para a negativa. Logo,

$$V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \quad (5.1.3)$$

é proporcional à carga  $Q$  da placa positiva.

Essa proporcionalidade vale para qualquer *par de condutores* (de forma qualquer) entre os quais se estabelece uma diferença de potencial  $V$ , em consequência de carregá-los com cargas  $\pm Q$ , o que decorre do princípio de superposição.

O coeficiente de proporcionalidade inverso, de  $Q$  em relação a  $V$ , chama-se *capacitância*  $C$  do par de condutores, que se diz constituir um *capacitor*.  $Q$  chama-se *carga do capacitor*.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (5.1.4)$$

Para  $C$  suficientemente grande, a (5.1.4) mostra que um capacitor permite armazenar uma carga  $Q$  grande com  $V$  pequeno.

Para um capacitor plano, pela (5.1.3),

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (5.1.5)$$

desprezando efeitos de bordas. Note que o fator  $4\pi$  não aparece nessa fórmula, devido à escolha de  $k$  feita na (2.3.2).

A unidade de capacitância, o *farad* (F), é definida por

$$\frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} \equiv 1 \text{ F} \quad (5.1.6)$$

Vemos pelo resultado acima que as dimensões de  $C$  são dadas por

$$[C] = [\epsilon_0] [L]$$

de modo que a constante  $\epsilon_0$  da lei de Coulomb pode ser medida em farads/metro. Seu valor é

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F / m} \quad (5.1.7)$$

Assim, para ter  $C = 1\text{F}$  com um capacitor de placas planas paralelas e  $d = 1 \text{ mm}$ , precisaríamos de uma área das placas

$$A = \frac{d C}{\epsilon_0} = \frac{10^{-3} \times 1}{8,85 \times 10^{-12}} = 1,13 \times 10^8 \text{ m}^2$$

o que corresponde a cerca de  $100 \text{ km}^2$ ! Isso mostra que  $1\text{F}$  é uma unidade muito grande de capacitância; as mais usadas são o  $\mu\text{F}$  e o  $\text{pF}$

## 5.2 Capacitor cilíndrico

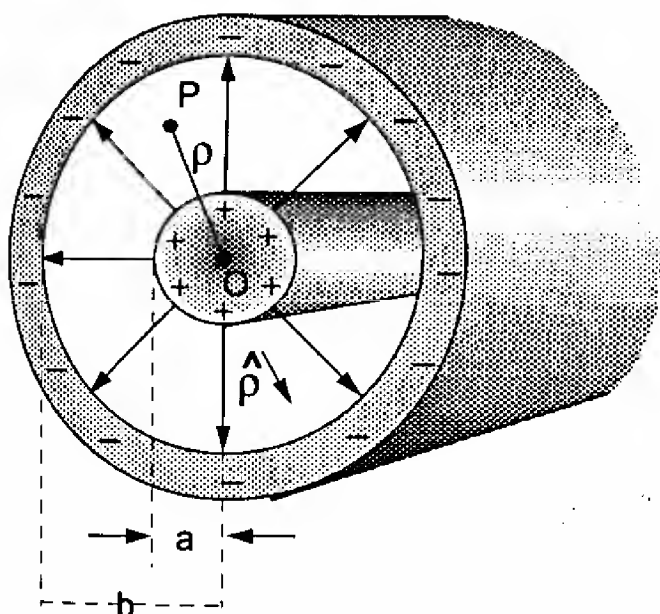


Figura 5.2 Capacitor cilíndrico

É formado por dois cilindros coaxiais, de raios  $a$  e  $b$  (fig. 5.2). Já vimos que o campo nesse caso é da forma (cf. Seç. 3.5)

$$\mathbf{E} = E(\rho) \hat{\rho} = \frac{B}{\rho} \hat{\rho} \quad (5.2.1)$$

onde  $\hat{\rho}$  é o vetor unitário radial num plano transversal e  $B$  é uma constante. Pela (3.5.3),

$$\left. \begin{aligned} E(a) &= \frac{\sigma_+}{\epsilon_0} = \frac{B}{a} = \frac{Q}{2\pi a l \epsilon_0} \\ -E(b) &= \frac{\sigma_-}{\epsilon_0} = -\frac{B}{b} = -\frac{Q}{2\pi b l \epsilon_0} \end{aligned} \right\} B = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \quad (5.2.2)$$

onde  $l$  é o comprimento do capacitor (desprezando efeitos de beirada).

A diferença de potencial entre as placas do capacitor é

$$V = V_+ - V_- = \int_+^- E(\rho) d\rho = B \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = B \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

o que dá, pela (5.2.2),

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)} \quad (5.2.3)$$

A garrafa de Leiden era um capacitor deste tipo (mas com vidro entre as placas, feitas em geral de folha de alumínio).

Se  $b = a + d$ , com  $d \ll a$  ( $d$  = distância entre as placas), vem

$$\ln \left( \frac{b}{a} \right) = \ln \left( 1 + \frac{d}{a} \right) \approx \frac{d}{a} \quad \left( \frac{d}{a} \ll 1 \right)$$

e fica

$$C \approx \frac{2\pi a \cdot l \epsilon_0}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

onde  $A = 2\pi al$  é a área da superfície lateral do cilindro, mostrando que o capacitor cilíndrico é como um capacitor plano "enrolado". Para dimensões da ordem típica de uma "garrafa" de Leiden,  $l = 20$  cm ;  $a = 5$  cm ;  $d = 1$  mm, resulta

$$C \approx \frac{2\pi \times 2 \times 10^{-1} \times 8,85 \times 10^{-12}}{\ln \left( \frac{5,1}{5} \right)} = 5,6 \times 10^{-10} \text{ F} = 560 \text{ pF}$$

### 5.3 Capacitor esférico

É formado por um par de esferas condutoras concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$  (fig. 5.3). Neste caso,

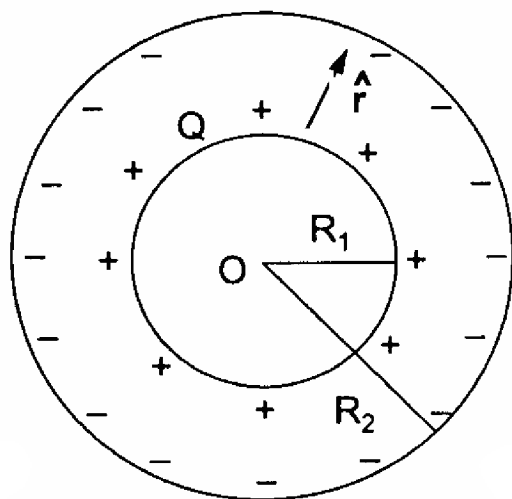


Figura 5.3 Capacitor esférico

$$\mathbf{E} = E(r) \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

o que dá (note que aqui, com simetria esférica,  $4\pi$  aparece)

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \left( \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \quad (5.3.1)$$

Se  $R_2 - R_1 = d \ll R_1$ , obtemos novamente como limite a (5.1.5) (verifique!).

Em particular, se a esfera externa está suficientemente afastada ( $R_2 \rightarrow \infty$ ), obtemos a *capacitância*  $C$  de uma esfera de raio  $R$ :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (5.3.2)$$

As linhas de força nesse caso vão da superfície da esfera ao "infinito". Um exemplo é a Terra, cujo raio é  $R \approx 6,37 \times 10^3$  km, o que dá

$$C \approx 4\pi \times 6,37 \times 10^6 \times 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \approx 7,1 \times 10^{-4} \text{ F} = 710 \mu\text{F}$$

o que é bastante grande para podermos escoar bastante carga para a terra sem alterar apreciavelmente o seu potencial ("ligação terra").

## 5.4 Associações de capacitores

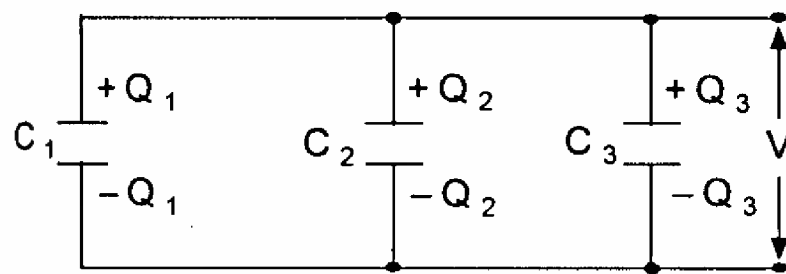


Figura 5.4 Conexão em paralelo

A fig. 5.4 mostra um exemplo de *conexão em paralelo*, cujos terminais podem estar ligados, por exemplo, aos pólos de uma bateria, que mantém entre eles a diferença de potencial  $V$ .

As placas superiores formam um condutor único, de carga total

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

e potencial  $V_+$ ; igualmente para as inferiores, com  $-Q$  e  $V_-$ , e

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_1 V \\ Q_2 &= C_2 V \\ Q_3 &= C_3 V \end{aligned} \right\} Q = (C_1 + C_2 + C_3) V, \text{ onde } V \equiv V_+ - V_-$$

Logo, o conjunto é equivalente a um capacitor único, de *capacitância equivalente*

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad (5.4.1)$$

(no caso,  $N = 3$ ). Note que  $C > \text{Máx}(C_1, C_2, \dots, C_N)$ .

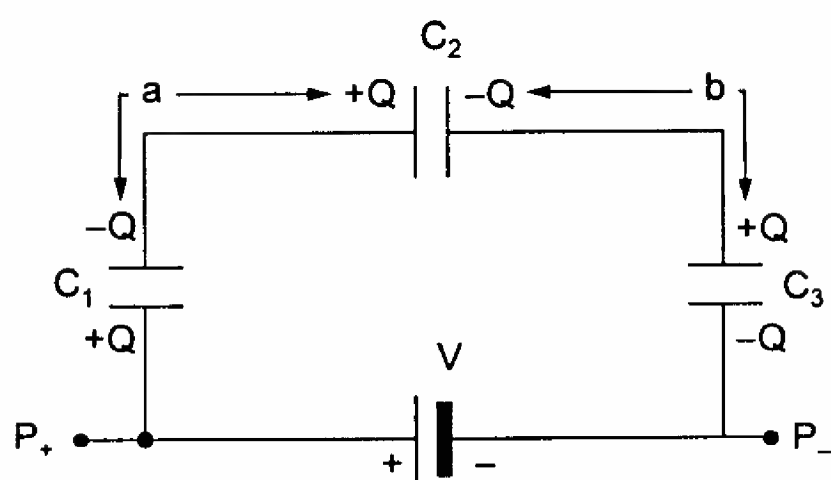


Figura 5.5 Conexão em série

Vejam agora a *conexão em série*, representada na fig. 5.5. Nesse sistema, cada um dos conjuntos intermediários, tais como *a* e *b* na figura, forma um condutor único, inicialmente neutro, no qual as cargas  $+Q$  e  $-Q$  são separadas por indução. A diferença de potencial total entre as extremidades  $P_+$  e  $P_-$  é

$$V_+ - V_- \equiv V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \equiv \frac{Q}{C}$$

Logo,

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}} \quad (5.4.2)$$

Note que  $C < \text{Min} (C_1, C_2, \dots, C_N)$ .

## 5.5 Energia eletrostática armazenada

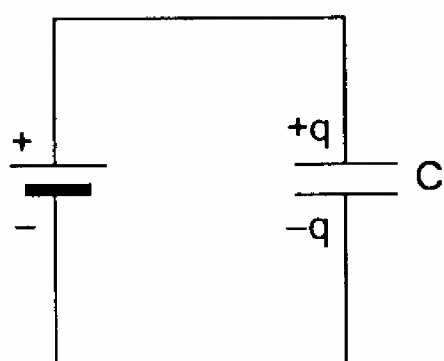


Figura 5.6 Carga de um capacitor

Consideremos a carga *gradual* do capacitor por uma bateria. Num instante em que a carga já armazenada é  $q$ , a diferença de potencial instantânea entre as placas é

$$v = \frac{q}{C}$$

e a bateria realiza um trabalho  $vdq$  para transferir uma carga adicional  $dq$ . Logo,

$$dU = v dq = \frac{q dq}{C} \quad \left\{ \quad U = \int_{q=0}^{q=Q} dU = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{q^2}{2C} \right|_0^Q$$

o que dá

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV} \quad (5.5.1)$$

para a energia total armazenada até atingir a carga final  $Q$ .

Para um capacitor plano, isto leva a

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2 = \frac{\epsilon_0}{2} Ad \left( \frac{V}{d} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \cdot Ad \quad (5.5.2)$$

Nessa expressão,  $Ad$  é o volume do espaço entre as placas do capacitor, no qual o campo elétrico fica confinado (desprezando os efeitos de bordas).

Logo, podemos pensar na energia como estando *armazenada no campo*, no espaço entre as placas, com uma *densidade de energia*

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (5.5.3)$$

Consideremos agora uma *esfera condutora* (isolada) com carga  $Q$ . Tratando-a como um capacitor, a energia potencial armazenada é

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (5.5.4)$$

o que também resulta de ser

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

o potencial na superfície, e de ser

$$\frac{1}{2} \int V \sigma dS = \frac{1}{2} QV$$

a energia potencial das cargas distribuídas na superfície com densidade  $\sigma$ .

Do ponto de vista de campo, consideraríamos que a energia está armazenada em todo o espaço *externo* à esfera, onde  $\mathbf{E} \neq 0$ . Se admitirmos que a (5.5.3) permanece válida, seria

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}$$

num ponto  $\mathbf{r}$  à distância  $r = |\mathbf{r}|$  do centro, pois

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Logo, a energia contida numa camada esférica de raio  $r$  e espessura  $dr$  seria

$$dU(r) = 4\pi r^2 dr u(r) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

e a energia total contida no campo seria

$$U = \int_R^\infty dU(r) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}}_{=1/R} \left\{ U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right.$$

o que concorda com o valor anterior (5.5.4).

Esses exemplos ilustram um resultado geral. A expressão geral (4.8.3) da energia potencial, obtida do ponto de vista de sua armazenagem nas cargas, pode ser transformada numa expressão em que ela aparece como armazenada no campo:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) dv \quad (5.5.5)$$

*Demonstração:* Partindo da equação de Poisson (4.6.1),

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

substituímos  $\rho$  na primeira integral por  $\epsilon_0 \text{ div } \mathbf{E}$ :

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int V(\mathbf{r}) \text{div } \mathbf{E} dv$$

Aplicamos agora a identidade (4.5.24),

$$\text{div} (f\mathbf{v}) = f \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f$$

que dá:

$$\text{div} (V\mathbf{E}) = V \text{div } \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \text{grad } V = V \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E}^2$$

$$U_v = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v \mathbf{E}^2 dv + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v \text{div} (V\mathbf{E}) dv$$

onde integramos sobre um volume  $v$  limitado por uma superfície  $S$ , por exemplo, uma esfera de raio  $R$ . Pelo teorema da divergência,

$$\int_v \text{div} (V\mathbf{E}) dv = \oint_S V(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

Se afastarmos a superfície  $S$  indefinidamente,  $V(\mathbf{r})$  sobre  $S$  cai como  $1/R$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  cai como  $1/R^2$  e  $dS$  cresce como  $R^2$ . Logo, a  $\oint_S$  cai como  $1/R$  e tende a zero para  $R \rightarrow \infty$ .

Resulta

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) dv$$

onde integramos sobre todo o espaço, o que demonstra a (5.5.5).

*Energia própria ("self-energy") de uma carga puntiforme*

Vimos que uma carga de dimensões da ordem de  $R$  vista a uma distância  $\gg R$  se comporta como se fosse puntiforme. Uma distribuição esfericamente simétrica atua exatamente como se toda a carga estivesse concentrada no seu centro.

Vimos que, neste caso, para uma distribuição esférica volumétrica uniforme de raio  $R$ , a (4.8.4) dá

$$U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

e, para uma distribuição de carga superficial (esfera condutora), a (5.5.4) dá

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Em ambos os casos,

$$U \sim \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

e *diverge* para  $R \rightarrow 0$ , ou seja, para uma carga "realmente" puntiforme. Essa é uma dificuldade básica do eletromagnetismo clássico, se tentarmos aplicá-lo, microscopicamente, a uma partícula que se acredita ser "realmente" puntiforme, como o elétron.

Segundo a relatividade restrita, a energia tem *inércia*, ou seja, a uma energia  $U$  está associada uma massa *inercial* (cf. *Física Básica* 4)

$$\boxed{m = \frac{U}{c^2}} \quad (5.5.6)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Se procurássemos imaginar um modelo clássico para o elétron, atribuindo a *toda* a sua massa origem eletromagnética, deveríamos ter, para um modelo esférico de raio  $r_0$ , do elétron,

$$\boxed{m_e \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 c^2} \left\{ \begin{array}{l} r_0 \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \end{array} \right.} \quad (5.5.7)$$

onde  $m_e \approx 9,11 \times 10^{-31}$  kg é a massa do elétron. Isso daria



$$r_0 \sim \frac{9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2} \text{ m} \sim 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

que se chama o *raio clássico do elétron*.

As forças coulombianas repulsivas entre elementos de carga de mesmo sinal não permitiriam a existência de um modelo *estável* para o elétron (teorema de Earnshaw), sem a intervenção de forças de outra natureza para contrabalançar a repulsão. Não faria sentido, porém, um modelo clássico para uma partícula como o elétron: já bem antes de chegar à escala de distâncias da ordem de  $r_0$ , efeitos quânticos se manifestam. A teoria quântica, porém, também encontra dificuldades para formular um modelo puntiforme de elétron.

### *Energia de condutores carregados*

Quando aplicamos a expressão

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dv$$

a um sistema de  $N$  condutores carregados, temos de substituir  $\rho dv \rightarrow \sigma dS$  e integrar sobre as superfícies  $S_1, S_2, \dots, S_N$  de todos os condutores, o que dá

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \sigma(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dS \quad (5.5.8)$$

Mas, sobre a superfície  $S_i$ ,  $V = V_i = \text{constante}$ . Logo,

$$U = \frac{1}{2} \sum_i V_i \int_{S_i} \sigma(r) dS, \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i \end{array} \right. \quad (5.5.9)$$

onde  $Q_i$  é a carga do condutor  $i$ , distribuída sobre  $S_i$ . Em particular, para um capacitor, com cargas  $\pm Q$ ,

$$U = \frac{1}{2} Q (V_+ - V_-) = \frac{1}{2} Q V$$

onde  $V$  é a diferença de potencial entre as duas placas. Isso dá outra demonstração do resultado (5.5.1).

Há uma diferença importante entre a (5.5.9) e a expressão

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

para a energia de *interação* entre cargas puntiformes, obtida na Seq. 4.8. Naquele caso,  $U$  representa somente a energia de *interação entre pares de cargas*, e  $V_i$  é o potencial na carga  $q_i$  devido às *outras* cargas  $q_j$  ( $j \neq i$ ). Na (5.5.9), porém,  $U$  é a energia *total* do sistema, e  $V_i$  é o potencial do condutor devido a *todas* as cargas, inclusive aquelas distribuídas sobre ele próprio.

### *Energia potencial de cargas num campo externo*

Se  $\varphi_i \equiv \varphi(\mathbf{r}_i)$  é o potencial do campo *externo*  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  na posição da carga  $q_i$ , temos neste caso

$$U = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (5.5.10)$$

conforme decorre da definição do potencial. Note a ausência do fator  $1/2$  nesse caso.

### *Força ponderomotriz sobre a superfície de um condutor*

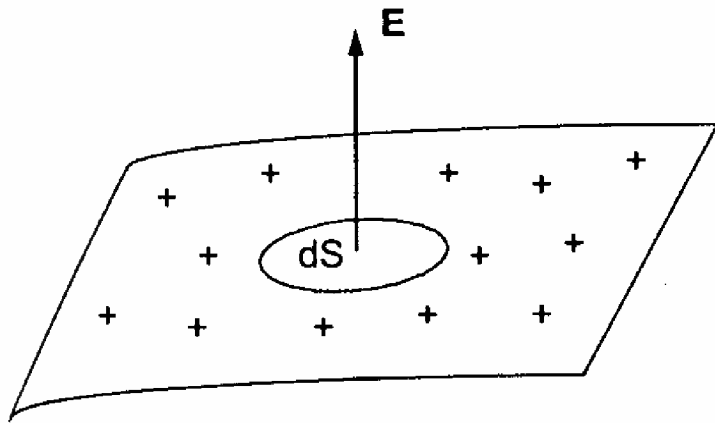


Figura 5.7 Elemento de superfície de um condutor carregado

Consideremos um elemento de carga  $dq = \sigma dS$  contido num elemento de superfície  $dS$  de um condutor (fig. 5.7). Vimos após a (3.5.11) que o campo na superfície é metade devido a  $dS$  e metade devido à distribuição de carga sobre o resto do condutor. Esta carga devida ao resto do condutor exerce uma força sobre

$dq$ , dada por

$$d\mathbf{F} = dq \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} dS$$

onde  $\sigma \hat{\mathbf{n}} / (2\epsilon_0)$  é o campo devido ao resto do condutor. Note que  $d\mathbf{F}$  tem sempre a direção e sentido da normal *externa*  $\hat{\mathbf{n}}$  independentemente do sinal de  $\sigma$ , pois é proporcional a  $\sigma^2$ .

Essa *força ponderomotriz* equivale a uma *tensão* (força por unidade de superfície)

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 \hat{\mathbf{n}} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \hat{\mathbf{n}} = u \hat{\mathbf{n}} \quad (5.5.11)$$

onde  $u$  é a densidade de energia (5.5.3) num ponto vizinho a  $dS$ .

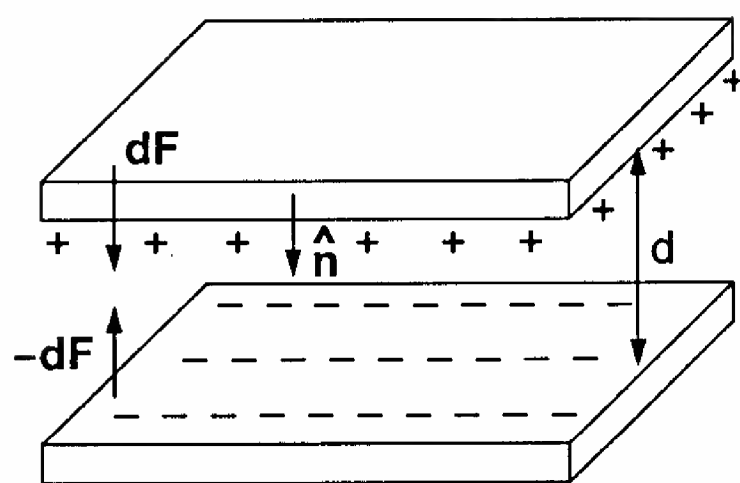


Figura 5.8 Atração entre as placas de um capacitor plano

Num capacitor plano, como  $\hat{n}$  é dirigido para dentro, essa tensão (fig. 5.8) representa uma força *atrativa* entre as placas (atração entre as cargas  $Q$  e  $-Q$ ). Se quisermos aumentar de  $\delta d$  a separação entre as placas, *mantendo*  $Q$  *constante* (ou seja, com as placas isoladas), a força externa  $F_{\text{ext}}$  aplicada tem de realizar um trabalho contra essa força atrativa ( $F_{\text{ext}} = -F$ ) dado por

$$F_{\text{ext}} \delta d = \left| \frac{dF}{dS} \right| A(\delta d) = u \delta V = \delta U$$

onde  $\delta V$  é a variação do volume entre as placas e  $\delta U$  é a variação da energia eletrostática armazenada neste volume. Assim, a força atrativa entre as placas (mantidas isoladas!) é

$$F = -F_{\text{ext}} = -\delta U / \delta d$$

Pelas (5.5.1) e (5.5.2),

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} d \quad \left\{ \quad F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \right. \quad (5.5.12)$$

## 5.6 Dielétricos

Até agora, só discutimos campos elétricos no vácuo ou na presença de condutores, dentro dos quais  $\mathbf{E} = 0$ . Que acontece com o campo na presença de um material isolante?

Cavendish (em 1773) e Faraday, independentemente, em 1837, descobriram que a capacitância de um capacitor *aumenta* quando se coloca um isolante entre as placas. Se o espaço entre as placas estiver totalmente preenchido pelo isolante, a capacitância aumenta por um fator  $\kappa$  que só depende da natureza do material isolante, e não da forma ou tipo de capacitor, conforme mostra a experiência. Esse fator chama-se *constante dielétrica* do isolante, e este também é chamado de *dielétrico*:

$$C = \kappa C_0 \quad (5.6.1)$$

onde  $C_0$  se refere ao vácuo (para o qual, portanto,  $\kappa = 1$ )

Valores de  $\kappa$  para alguns materiais típicos

Substância	Ar 1atm. 20°C	Água destilada 20°C	Vidro	Quartzo	Baquelite	Porcelana	Papel
$\kappa$	1,00059	80,4	~ 4 a 10	~ 5	4,9	~ 6,5 a 7	3,7

Por que razão  $C$  aumenta? Antes de colocarmos o dielétrico, tínhamos

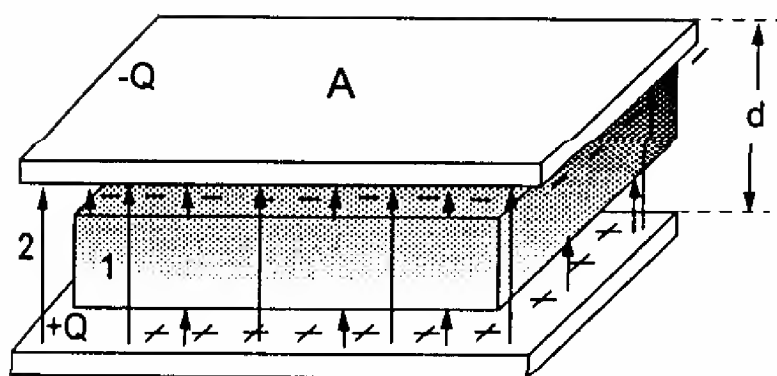


Figura 5.9 Capacitor plano com dielétrico

$$Q = C_0 V = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$$

onde consideramos um capacitor plano (fig. 5.9). Com o dielétrico, a carga  $Q$  das placas não mudou, mas  $C_0 \rightarrow C_0 \kappa$ . Logo, é a *voltagem* (tensão)  $V$  (diferença de potencial entre as placas) que deve ter *caído* por um fator  $1/\kappa$ :

$$V_0 \rightarrow \frac{V_0}{\kappa} \quad (5.6.2)$$

Mas  $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . Logo, é o *campo*  $\mathbf{E}$  que deve ter-se reduzido:  $\mathbf{E}_0 \rightarrow \mathbf{E}_0/\kappa$  (Embora ainda não tenhamos definido  $\mathbf{E}$  dentro do meio, podemos tomá-lo do lado de fora, como na fig. 5.9, onde a lâmina dielétrica é um pouco mais curta que as placas).

No pequeno intervalo entre o dielétrico e cada placa, porém, o campo ainda deve ser  $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ , porque a densidade superficial  $\sigma$  nas placas não mudou, o que não muda o campo da placa. Logo, *ao atravessar a superfície do dielétrico*, o campo (que é perpendicular a ela), sofre uma *descontinuidade*

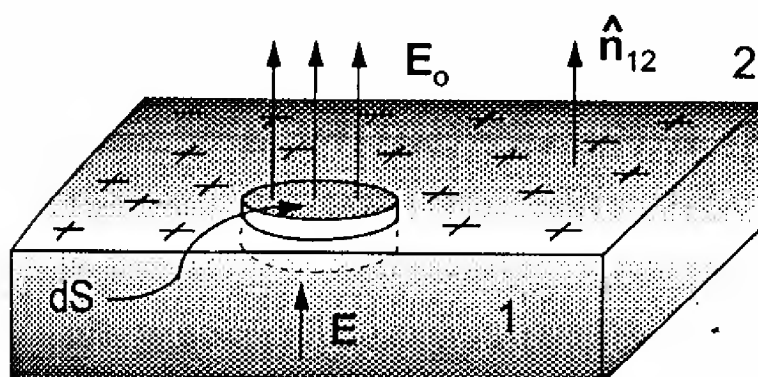


Figura 5.10 Superfície gaussiana

$$\begin{aligned} \hat{n}_{12} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= E_0 - E = \\ &= E_0 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = (\kappa - 1)E \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

onde  $\hat{n}_{12}$  é o vetor unitário da normal à interface entre o dielétrico (meio 1) e o vácuo (meio 2), orientado no sentido  $1 \rightarrow 2$ . Tomando uma superfície gaussiana

cilíndrica, como na fig. 5.10, o fluxo que entra pela base inferior é portanto menor do que aquele que sai pela base superior. Pela lei de Gauss,

$$\hat{n}_{12} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) dS = dq_p / \epsilon_0 = \sigma_p dS / \epsilon_0 \quad (5.6.4)$$

o que indica a presença, sobre a base superior da lâmina, de uma densidade de carga (positiva) superficial  $\sigma_p$ , com

$$\sigma_p = \epsilon_0 (E_0 - E) = \epsilon_0 (\kappa - 1)E \quad (5.6.5)$$

onde  $E$  é o campo elétrico no interior do meio.

Analogamente, na base inferior da lâmina dielétrica, deve existir uma densidade negativa correspondente,  $-\sigma_p$ : a lâmina, como um todo, se mantém neutra.

Vemos que o efeito é análogo ao da *indução eletrostática*, que ocorreria se a lâmina fosse condutora. Entretanto, num condutor, os elétrons se deslocam livremente, explicando o efeito de indução, ao passo que num isolante não há elétrons livres: os elétrons estão *ligados* a átomos ou moléculas, formando sistemas *neutros*.

Como já vimos, porém, a aplicação de um campo elétrico a um sistema neutro tende a produzir um *momento de dipolo elétrico* numa molécula não-polar, ou a alinhar o dipolo com o campo, numa molécula polar (Seç 4.4).

Para ver de que maneira isso dá origem às densidades de carga superficial  $\pm \sigma_p$ , consideremos as consequências da *polarização* (criação de momentos de dipolo)

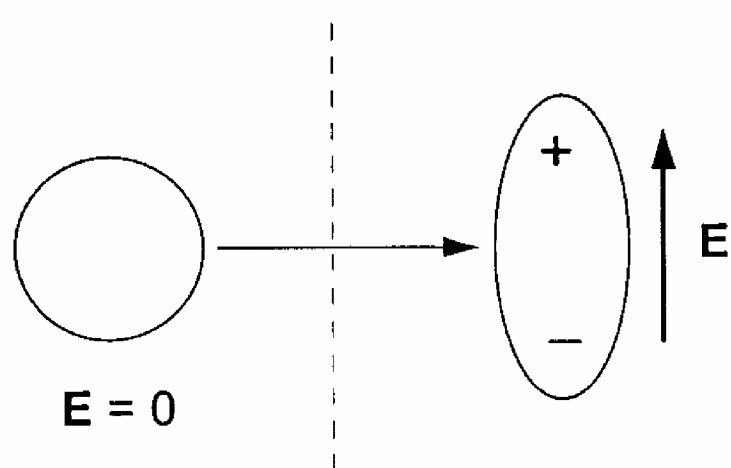


Figura 5.11 Criação de um dipolo

de moléculas não-polares, sob a ação do campo dentro do dielétrico. A aplicação do campo produz um deslocamento (fig. 5.11) das cargas positivas na direção de  $\mathbf{E}$  e das negativas no sentido oposto, *criando* o dipolo. Mesmo na escala microscópica, esse deslocamento é extremamente pequeno, porque os campos  $\mathbf{E}$  aplicados têm intensidades tipicamente mui-

tíssimo menores que os campos intraatômicos: por exemplo, a ordem de grandeza do campo do próton sobre o elétron no átomo de  $H$  (raio  $\sim 0.5 \text{ \AA} = \frac{1}{2} \times 10^{-10} \text{ m}$ ) é

$$E_{at} \sim \frac{9 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})}{\left(\frac{1}{2} \times 10^{-10}\right)^2} \sim 6 \times 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{6 \text{ GV}}{\text{cm}}!$$

Mesmo um campo aplicado de 60 kV/cm, extremamente intenso do ponto de vista macroscópico, ainda é da ordem de  $10^5$  vezes menor, e produz um deslocamento de carga  $\sim 10^{-5}$  vezes o raio atômico.

Num material com moléculas polares (gás ou líquido, por exemplo), o alinhamento num campo aplicado também produz uma polarização preferencial na direção do campo (discutido na Seç. 11.5 para o caso magnético).

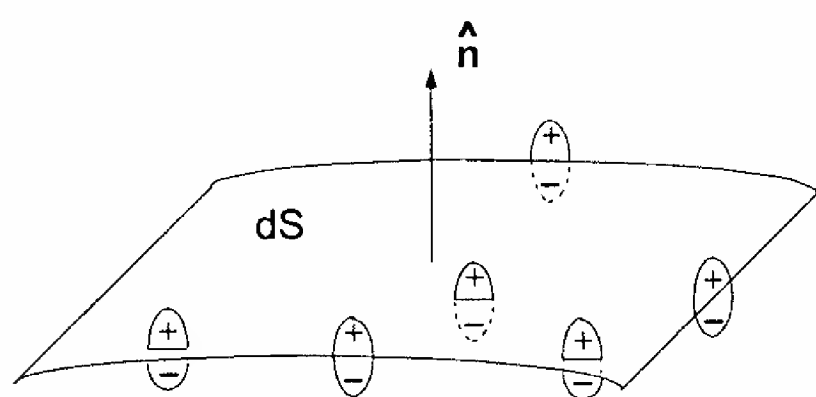


Figura 5.12 Fluxo de carga através de  $dS$

Um *elemento de superfície orientado*  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$  ( $\hat{\mathbf{n}}$  = versor da normal) dentro do dielétrico é atravessado (fig. 5.12) por uma carga total  $dq$  como consequência deste deslocamento. Essa carga varia com a orientação  $\hat{\mathbf{n}}$  da mesma forma que o fluxo de fluido através de uma superfície  $dS$  no escoamento de um fluido, ou seja, como o fluxo de um vetor  $\mathbf{P}$ :

$$dq = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \equiv P_n dS \quad (5.6.6)$$

onde  $\mathbf{P}$  tem a direção do deslocamento das cargas ( $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$ ) para um meio *isotrópico* (existem meios anisotrópicos, em que isto não acontece, mas não vamos considerá-los) e tem dimensões de  $[dq/dS]$ , ou seja de uma *densidade superficial* de carga.

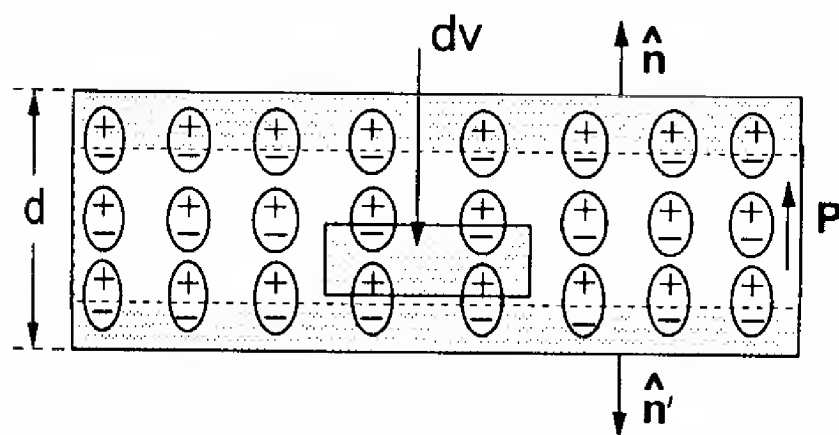


Figura 5.13 Polarização homogênea

Consideremos primeiro, para simplificar, o caso em que a polarização é *homogênea* (a mesma em qualquer elemento de volume). Nesse caso, para um elemento de volume  $dv$  totalmente interno ao dielétrico, não há variação de sua carga total, pois a carga que o atravessa para fora através da base superior é compensada pela que entra através da base inferior.

Mas isso não acontece na superfície do dielétrico: faltam vizinhos de um lado, de forma que não há compensação. Pela definição de  $\mathbf{P}$ , a carga não-compensada na superfície é, para um elemento  $dS$ ,

$$dq = P_n dS \equiv \sigma_p dS \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_p = P_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \end{array} \right. \quad (5.6.7)$$

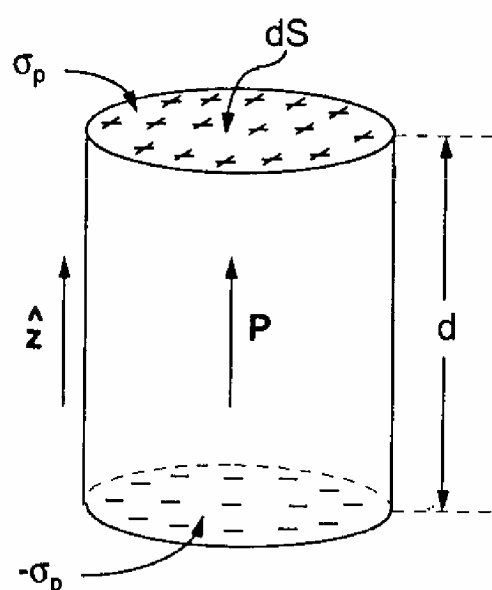


Figura 5.14 Cilindro polarizado

que tem sinais opostos no topo da camada, onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é paralelo a  $\mathbf{P}$  ( $\sigma_p = +P$ ) e na base, onde é antiparalelo ( $\sigma_p = -P$ ). Note que  $\hat{\mathbf{n}}$  é orientada para fora do dielétrico (fig. 5.13).

Isso explica o aparecimento das densidades de carga  $\sigma_p$ , que se chamam *cargas de polarização*. Se considerarmos um cilindro que vai do topo da camada à sua base, ele adquire então um *momento de dipolo elétrico* (fig. 5.14)

$$d\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}}(dq)d = \hat{\mathbf{z}}\sigma_p(dS) \cdot d = P\hat{\mathbf{z}}dv = \mathbf{P}dv$$

onde  $dv$  é o volume do cilindro. Logo,

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dv} \quad (5.6.8)$$

O vetor  $\mathbf{P}$  chama-se *polarização dielétrica*: vemos que representa o *momento de dipolo por unidade de volume* induzido pelo campo dentro do meio isolante.

Qual é a relação entre a polarização  $\mathbf{P}$  e o campo  $\mathbf{E}$ ? Para obtê-la, precisamos de um *modelo microscópico* da estrutura do dielétrico, a fim de obter o momento de dipolo criado pelo campo, ou seja, a resposta de cada átomo ou molécula ao campo aplicado. Isso requer o emprego da mecânica quântica.

Entretanto, como já vimos, para campos aplicados típicos, a perturbação que produzem é muito pequena em confronto com os campos intra-atômicos. O resultado é que a polarização é *proporcional ao campo aplicado*, uma espécie de análogo atômico da lei de Hooke (deslocamento a partir do equilíbrio proporcional à força aplicada):

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.6.9)$$

onde  $\chi$  é uma constante numérica característica do material, denominada *susceptibilidade dielétrica* (para campos muito intensos, isto deixa de ser verdade, podendo aparecer *efeitos não-lineares*, proporcionais a  $\mathbf{E}^2$ ,  $\mathbf{E}^3$ , ..., o que também é análogo aos desvios da lei de Hooke).

Finalmente, resulta

$$\sigma_p = P = \chi \epsilon_0 E = \epsilon_0 (\kappa - 1) E \quad (5.6.10)$$

ou seja,

$$\kappa = 1 + \chi \quad (5.6.11)$$

o que relaciona a constante dielétrica do material com a sua susceptibilidade.

As cargas de polarização  $\sigma_p$  são também chamadas de *cargas ligadas*, porque resultam de cargas ligadas a átomos e moléculas, em contraposição às *cargas livres* sobre condutores (devidas a elétrons livres), como as cargas das placas metálicas do capacitor, que são livres para se deslocarem. *Todas as cargas*, livres e ligadas, têm de ser levadas em conta no cálculo do campo elétrico  $\mathbf{E}$ .

### Polarização inomogênea

Se a polarização varia de ponto a ponto dentro do dielétrico, por ser ele inomogêneo, deixa de ser verdade que as cargas de polarização só aparecem na superfície.

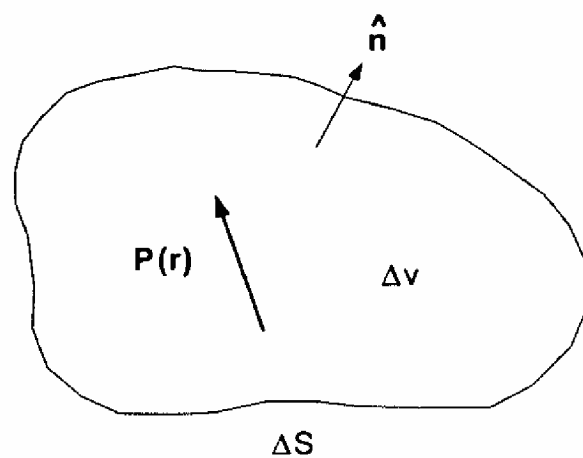


Figura 5.15 Volume dentro de um dielétrico

Com efeito, nesse caso, pela definição de  $\mathbf{P}$ , a carga total que *sai* de um volume  $\Delta v$  situado dentro do dielétrico, através de sua superfície  $\Delta S$  (Fig. 5.15), em consequência de sua polarização pelo campo, é

$$\int_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\Delta v} (\text{div } \mathbf{P}) dv$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor da normal externa.

Logo, pela conservação da carga total, se  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$ , com  $\text{div } \mathbf{P} \neq 0$  (caso inhomogêneo), a carga contida dentro de  $\Delta v$ , como consequência da polarização, é

$$\Delta q = - \int_{\Delta v} \text{div } \mathbf{P} dv$$

o que equivale a uma densidade *volumétrica* de carga de polarização.

$$\boxed{\rho_p = -\text{div } \mathbf{P}} \quad (5.6.12)$$

Se, além disso, existirem dentro do dielétrico cargas *livres* de densidade volumétrica  $\rho$  (por exemplo, cargas no ar, que é um dielétrico), a densidade de carga *total* que gera o campo  $\mathbf{E}$  é  $\rho + \rho_p$ , de forma que a equação de Poisson fica

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \text{div } \mathbf{P} \quad (5.6.13)$$

Como  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , pela (5.6.10), podemos reescrever a (5.6.13) em função apenas da *densidade de carga livre*  $\rho$ :

$$\boxed{\text{div}[(1 + \chi)\mathbf{E}] = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div}(\kappa \mathbf{E}) = \text{div } \mathbf{D}} \quad (5.6.14)$$

onde definimos o novo campo (*vetor deslocamento elétrico*)

$$\boxed{\mathbf{D} \equiv \kappa \mathbf{E}} \quad (5.6.15)$$

A (5.6.14) é a *equação de Poisson no interior de um dielétrico*. Note que  $\chi$  e  $\kappa$  permanecem dentro de  $\text{div}(\dots)$ , porque, no caso inhomogêneo, variam de ponto a ponto.

Por outro lado, o campo  $\mathbf{E}$  continua sendo conservativo, ou seja,

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{E} = 0} \quad (5.6.16)$$

As (5.6.14) e (5.6.16) dão a *forma local das equações básicas da eletrostática num meio dielétrico geral*, onde  $\kappa$  pode variar de ponto a ponto. São as *equações de Maxwell da eletrostática*.

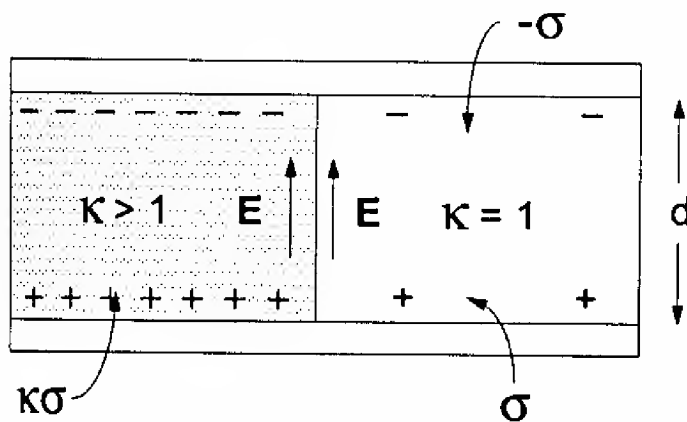


Figura 5.16 Capacitor semi-preenchido por dielétrico

### Exemplo

Consideremos (fig. 5.16) um capacitor de placas planas paralelas metade do qual é preenchida com um dielétrico ( $\kappa > 1$ ), a outra metade não ( $\kappa = 1$ ). As placas metálicas são equipotenciais. Logo, sua diferença de potencial  $V$  define um campo  $\mathbf{E}$  uniforme,  $E = V/d$ , o mesmo nas



duas metades. Assim,  $E = \sigma / \epsilon_0$  onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga (livre) na metade da placa inferior onde  $\kappa = 1$ .

Na outra metade, porém, o *mesmo*  $E$  resulta da soma da carga livre com a carga de polarização, que tem sinal oposto e vale, como vimos,

$$\sigma_p / \epsilon_0 = -(\kappa - 1) E = E - \kappa E = E - [(\kappa \sigma) / \epsilon_0]$$

Logo,

$$E = (\sigma_p + \kappa \sigma) / \epsilon_0$$

e a carga *livre* na outra metade da placa tem densidade superficial  $\kappa \sigma$ . Assim, a carga total da placa é

$$Q = \frac{A}{2} \sigma + \frac{A}{2} \kappa \sigma = \frac{1}{2} (\kappa + 1) \sigma A = \frac{1}{2} (\kappa + 1) \epsilon_0 A E = \frac{1}{2} (\kappa + 1) \epsilon_0 \frac{A}{d} V$$

o que dá

$$C = \frac{1}{2} (\kappa + 1) \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (5.6.17)$$

O resultado é equivalente à associação em paralelo de dois capacitores de área  $A/2$ , um com dielétrico e o outro sem, como é natural.

Note que o campo elétrico *tangencial* à lâmina dielétrica se conserva na interface, ao contrário da componente *normal* à lâmina nas bases superior e inferior, no caso em que o dielétrico não preenche toda a cavidade [cf. (5.6.3)].

### Energia

O raciocínio anterior, em que calculamos a energia armazenada num capacitor pelo trabalho necessário para carregá-lo, permanece válido; ou seja, continua valendo

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

Mas  $C$  aumenta por um fator  $\kappa$  na presença de um dielétrico (para o mesmo  $V$ ).

Logo, a *densidade de energia do campo* dentro do dielétrico é

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \kappa E^2 \quad (5.6.18)$$

um fator  $\kappa$  maior do que no vácuo.

É preciso realizar um trabalho maior para chegar à mesma carga total, porque parte dele é gasta em polarizar (ou orientar) o material, ficando armazenada como energia interna das moléculas polarizadas (como a energia armazenada numa mola distendida, no caso da lei de Hooke).

## 5.7 Condições de contorno

A interface entre dois meios diferentes, como a lâmina dielétrica e o ar na fig. 5.10, é uma "superfície de descontinuidade". Do ponto de vista microscópico, é na realidade uma *camada de transição*, de espessura típica da ordem de algumas camadas atômicas, onde as propriedades do meio variam continuamente entre as de um dos meios e as do outro, mas de forma tão rápida na escala macroscópica que a idealizamos por uma superfície de descontinuidade.

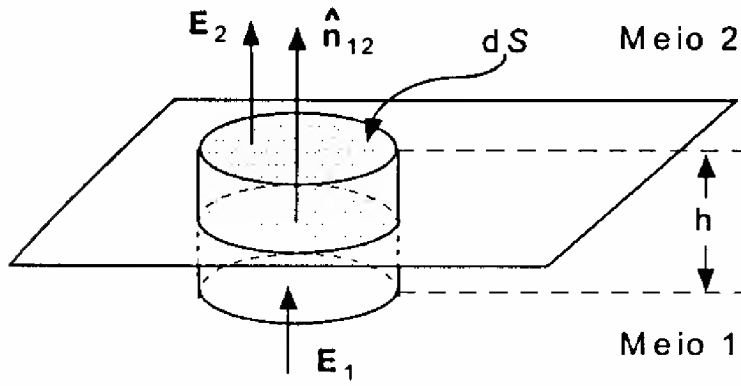


Figura 5.17 Superfície gaussiana

orientada de  $1 \rightarrow 2$ . Como o fluxo através da superfície lateral  $\rightarrow 0$  com  $h$ , o fluxo total através de  $S$  é como na (5.6.4),

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot dS = \lim_{h \rightarrow 0} (\text{div } \mathbf{E} \cdot \Delta v)$$

onde  $\Delta v = h \cdot dS$ . Resulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \text{div } \mathbf{E}) = \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \equiv \text{Div } \mathbf{E} \quad (5.7.1)$$

onde  $\text{Div } \mathbf{E}$  chama-se a *divergência superficial* de  $\mathbf{E}$ .

Como as fontes de  $\mathbf{E}$  são *todas* as cargas (livres e de polarização), pela (5.6.13),

$$\text{div } \mathbf{E} = (\rho + \rho_p) / \epsilon_0$$

e temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \text{div } \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{h \rightarrow 0} [h(\rho + \rho_p)] = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma + \sigma_p)$$

onde  $\sigma$  e  $\sigma_p$  são as densidades *superficiais* de carga livre e de carga de polarização, respectivamente.

Logo, a forma limite da equação de Poisson para  $\mathbf{E}$  numa superfície de descontinuidade entre dois meios é

$$\text{Div } \mathbf{E} \equiv \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = (\sigma + \sigma_p) / \epsilon_0 \quad (5.7.2)$$

O resultado da (5.6.4) é um caso particular, em que  $\sigma = 0$ .

A *divergência superficial* de um vetor mede a *descontinuidade da sua componente normal* ao atravessar a superfície de descontinuidade.

Já para o vetor  $\mathbf{D}$ , cujas fontes, pela (5.6.14), são apenas as cargas *livres*

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \operatorname{Div} \mathbf{D} = \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5.7.3)$$

onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga livre na interface.

Em particular, se não há cargas superficiais livres na interface entre os meios 1 e 2, resulta

$$\left| \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2,n} - D_{1,n} = 0 \right| \quad (5.7.4)$$

ou seja, a *componente normal*  $D_n$  de  $\mathbf{D}$  é *contínua na interface (sem carga livre) entre dois meios*, ao passo que a componente normal de  $\mathbf{E}$  é *descontínua*, devido às cargas superficiais de polarização,  $\sigma_p$ . Isso é bem visível no diagrama de linhas de força da fig. 5.9: as linhas de força de  $\mathbf{E}$  são mais densas fora do que dentro do meio, ao passo que as de  $\mathbf{D}$  seriam contínuas.

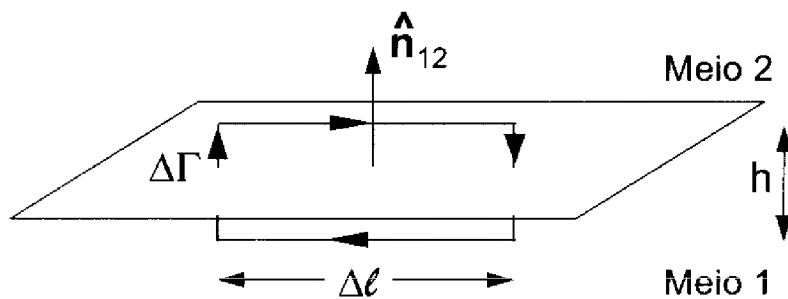


Figura 5.18 Circuito  $\Delta \Gamma$

Podemos proceder de forma análoga com a circulação

$$\oint_{\Delta \Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

de  $\mathbf{E}$  ao longo de um circuito fechado  $\Delta \Gamma$  de altura  $h$  e lados  $\Delta l$  situados um em

cada meio. Na circulação, intervém apenas a componente de  $\mathbf{E}$  *tangencial* à superfície.

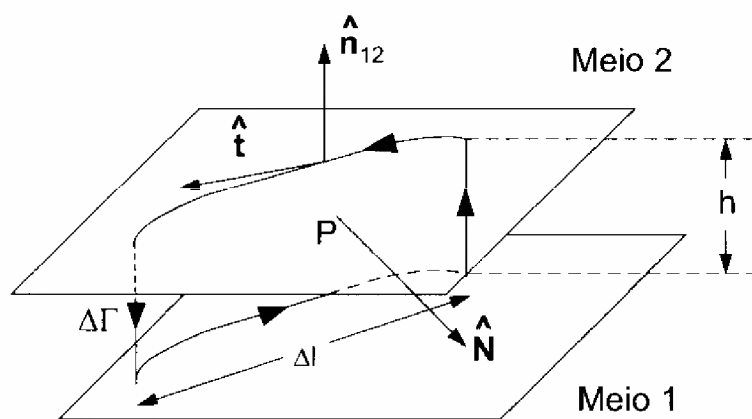


Figura 5.19 Vetores unitários na interface

Aplicando o teorema de Stokes à circulação de  $\mathbf{E}$  ao longo de  $\Delta \Gamma$ , e desprezando a contribuição dos lados de altura  $h$  ( $h \rightarrow 0$ ), vem

$$\int_{\Delta \Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} \Delta l - \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} \Delta l = \int_{\Delta S} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \hat{\mathbf{N}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} h \Delta l = \hat{\mathbf{N}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \Delta S$$

onde  $\hat{\mathbf{t}}$  é o versor da tangente a  $\Delta\Gamma$  no meio 2 e  $\hat{\mathbf{N}}$  é o versor da normal à área  $\Delta S = h \Delta l$  contida dentro de  $\Delta\Gamma$ .

Por conseguinte, para  $h \rightarrow 0$ ,

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = (h \operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{N}}} \quad (5.7.5)$$

Vemos pela fig. da pg. anterior que

$$\boxed{\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{n}}_{12}} \quad (5.7.6)$$

o que dá

$$\boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{n}}_{12}) = \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{N}}} \quad (5.7.7)$$

usando a invariância do produto misto de 3 vetores por permutação circular.

Comparando com a (5.7.5) e notando que a orientação de  $\hat{\mathbf{N}}$  num plano paralelo à interface é arbitrária, concluímos que\*

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} (h \operatorname{rot} \mathbf{E}) = \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \equiv \operatorname{Rot} \mathbf{E}} \quad (5.7.8)$$

onde  $\operatorname{Rot} \mathbf{E}$ , o *rotacional superficial* de  $\mathbf{E}$ , mede, portanto, a *descontinuidade na componente tangencial* de  $\mathbf{E}$ .

Como o campo eletrostático é sempre irrotacional,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , obtemos

$$\boxed{\operatorname{Rot} \mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0} \quad (5.7.9)$$

ou seja, a *componente tangencial do campo eletrostático é sempre contínua*.

Juntamente com a equação  $\hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = (\sigma + \sigma_p)/\epsilon_0$ , que dá a descontinuidade na componente normal, esta condição define inteiramente  $(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$ ; o conjunto destas duas equações é chamado de *condições de contorno*. Vemos que representa simplesmente a forma limite das equações de Maxwell para  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  e  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ , numa superfície de descontinuidade entre dois meios diferentes: *o comportamento do campo é inteiramente descrito pelas equações de Maxwell* (inclusive neste caso limite).

\* Sendo sempre  $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} = 0$ , poderia haver uma componente de  $h \operatorname{rot} \mathbf{E}$  paralela a  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$ . Porém, tomando  $Oz$  paralelo a  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$ , essa componente seria

$$h \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

que  $\rightarrow 0$  com  $h$ , porque as derivadas de  $\mathbf{E}$  em direções tangenciais à interface permanecem finitas.

Em particular, se o meio 1 é um condutor ( $E_1 = 0$ ), e  $\hat{n}_{12} \equiv \hat{n}$  aponta para *fora* dele, obtemos na superfície,

$$\hat{n}_{12} \times E_2 = \hat{n} \times E = 0 \quad (5.7.10)$$

ou seja, o campo  $E$  é *normal* à superfície do condutor, e

$$\hat{n}_{12} \cdot E_2 = \hat{n} \cdot E = E = \sigma / \epsilon_0 \quad (5.7.11)$$

que é o resultado (3.5.11) para o campo na superfície de um condutor.

Vemos ainda, que, na superfície de descontinuidade,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla) = \hat{n}_{12} \mathcal{D} \quad (5.7.12)$$

onde  $\mathcal{D}$  é o operador de *diferença*,

$$\mathcal{D} [E] \equiv E_2 - E_1 \quad (5.7.13)$$

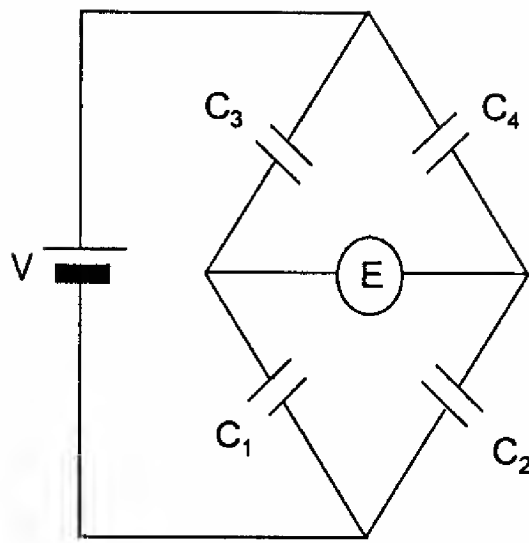
Assim,

$$\begin{aligned} \text{div } E &= \hat{n}_{12} \cdot \mathcal{D} [E] \\ \text{rot } E &= \hat{n}_{12} \times \mathcal{D} [E] \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

## PROBLEMAS

1. Na experiência de Millikan, uma gota de óleo microscópica, de  $2\mu\text{m}$  de raio, é introduzida entre as placas de um capacitor plano, cujo espaçamento é de 5 cm. A densidade do óleo é de  $0,78 \text{ g/cm}^3$ . Com as placas inicialmente descarregadas, observa-se que a gota cai, atingindo, devido à resistência do ar, uma velocidade terminal constante  $v$ . Quando se aplica entre as placas uma diferença de potencial de 40 kV, com o campo elétrico orientado para cima, verifica-se que a velocidade de queda duplica. Qual é o sinal e o valor da carga, em unidades da carga do elétron?

2. Dois capacitores, de capacitâncias  $C$  e  $2C$ , estão carregados com a mesma carga  $Q$  e inicialmente isolados um do outro. Se as placas negativas de ambos forem ligadas à terra e as positivas ligadas uma à outra, (a) qual será o potencial final das placas positivas? (b) qual é a variação de energia neste processo? (c) que acontece com essa energia?

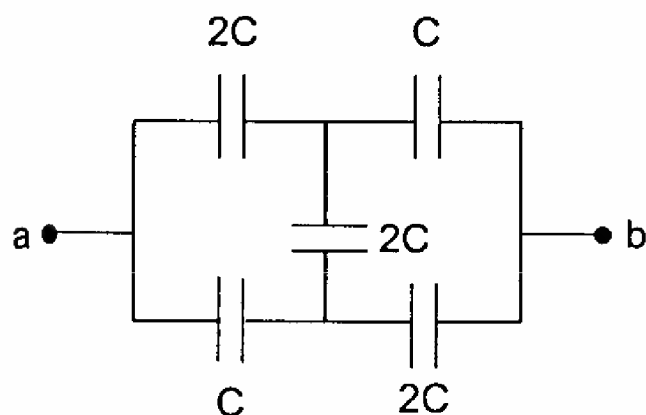
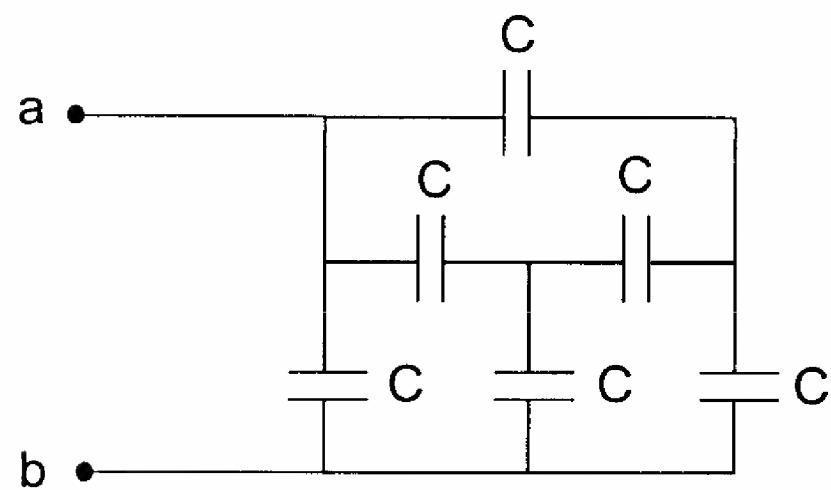


3. Na *ponte de capacitâncias* da figura, o eletrômetro  $E$  detecta a diferença de potencial entre os dois pontos entre os quais está ligado. Mostre que, quando a leitura de  $E$  é zero, vale a relação

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$$

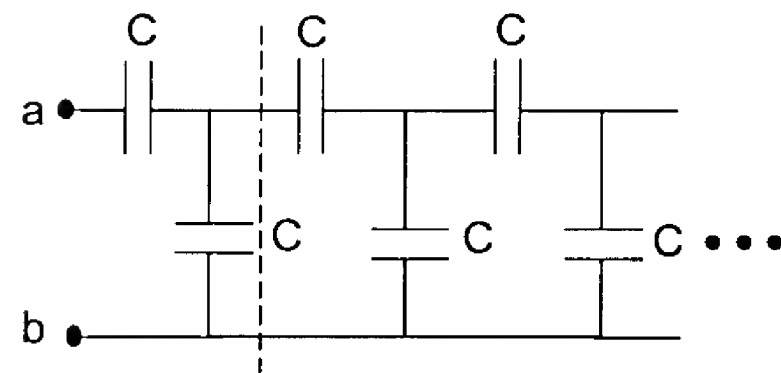
que pode ser usada para medir  $C_1$  em função de  $C_2$  e da razão  $C_3/C_4$ .

4. Mostre que é possível substituir o sistema de capacitores da figura por um único capacitor equivalente entre os pontos  $a$  e  $b$  e calcule a capacitância deste capacitor.



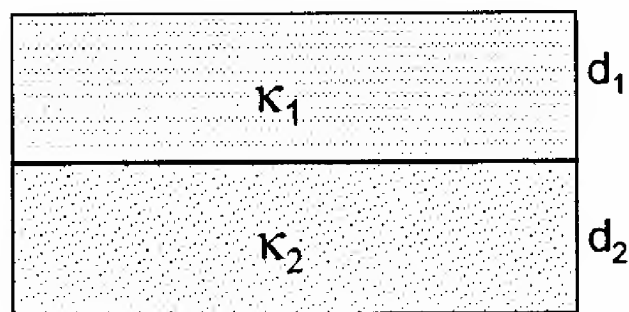
5. Ache a capacitância equivalente ao sistema da figura, entre os pontos  $a$  e  $b$ .

6. Ache a capacitância equivalente ao sistema infinito de capacitores da figura, entre os pontos  $a$  e  $b$ . **Sugestão:** Note que a capacitância à direita da linha vertical interrompida equivale a do sistema todo, por ser ele infinito



7. Um capacitor de placas paralelas de área  $A$  e espaçamento  $D$  tem, inserida entre elas, uma lâmina de dielétrico de mesma área  $A$ , de constante dielétrica  $\kappa$  e espessura  $d < D$ . Demonstre que a capacitância do sistema é a mesma que a de um capacitor de espaçamento  $D - d$ , com ar entre as placas, em série com um capacitor de espaçamento  $d$ , todo preenchido com o dielétrico de constante dielétrica  $\kappa$ .

8. Um capacitor esférico de raio interno  $a$  e raio externo  $b$  tem o espaço entre as placas totalmente preenchido por duas camadas concêntricas de dielétricos diferentes superpostas, uma de espessura  $c - a$  e constante dielétrica  $\kappa_1$ , e outra de espessura  $b - c$  e constante dielétrica  $\kappa_2$ . Calcule a capacitância deste capacitor.



9. O espaço entre as placas (de área  $A$ ) de um capacitor plano está preenchido por duas camadas dielétricas adjacentes, de espessuras  $d_1$  e  $d_2$  e constantes dielétricas  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , respectivamente. A diferença de potencial entre as placas é  $V$  e o campo aponta de 1 para 2. Ache:

(a) A capacitância  $C$  do capacitor.

(b) A densidade superficial de carga livre  $\sigma$  nas placas.

10. Uma esfera de material dielétrico homogêneo com constante dielétrica  $\kappa$ , de raio  $a$ , está uniformemente carregada com densidade volumétrica de carga  $\rho$ .

- (a) Calcule o vetor campo elétrico  $\mathbf{E}$  dentro e fora da esfera.
- (b) Ache a diferença de potencial  $V$  entre o centro e a superfície da esfera.

# 6

# CORRENTE ELÉTRICA

## 6.1 Intensidade e densidade de corrente

Se ligarmos por um fio metálico as placas de um capacitor carregado, não pode haver equilíbrio eletrostático, pois as extremidades do fio condutor estão com potenciais diferentes. Sabemos o que acontece: uma *corrente elétrica* passa através do fio quando a conexão é feita. Essa corrente resulta do movimento de elétrons livres, que se deslocam da placa negativa à positiva através do fio. Entretanto, por razões históricas (Seç. 2.1), convencionou-se definir como *sentido* da corrente aquele que corresponderia ao deslocamento de cargas positivas (oposto ao sentido do movimento dos elétrons).

A *intensidade  $i$  da corrente* através de uma dada secção do fio condutor é definida como a *quantidade de carga que atravessa esta secção por unidade de tempo*:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (6.1.1)$$

A unidade de corrente no SI é o *ampère*, que será definido mais tarde (Cap. 8) em termos do qual definimos o coulomb. Numa corrente de 1A, a secção do fio é atravessada a cada segundo por 1C de carga, equivalente a

$$\frac{1\text{C}}{e} = \frac{1\text{C}}{1,6 \times 10^{-19}\text{C}} \approx 6,2 \times 10^{18} \text{ elétrons}$$

Podemos considerar, em lugar de uma secção transversal, uma secção oblíqua de orientação qualquer. Em particular, considerando um elemento de área  $dS$  cujo versor da



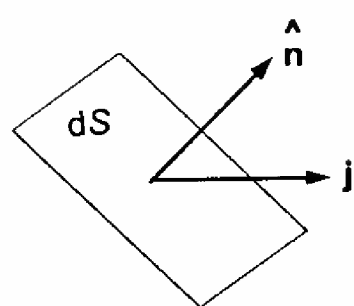


Figura 6.1 Fluxo de corrente

normal  $\hat{n}$  define essa orientação, a corrente  $di$  que o atravessa pode ser considerada como o *fluxo* através de  $dS$  de um vetor  $\mathbf{j}$  (fig. 6.1):

$$di = \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS \quad (6.1.2)$$

onde  $\mathbf{j}$  tem a direção e o sentido que corresponderiam ao movimento das cargas positivas. O vetor  $\mathbf{j}$  chama-se *densidade de corrente*: vemos que está associado à *corrente por unidade de área*, e suas unidades são  $A/m^2$ .

Os portadores da corrente podem ser de vários tipos, conforme a natureza do meio em que passa a corrente. Num metal, conforme foi mencionado, são os elétrons. Num tubo de descarga gasosa (como uma lâmpada fluorescente), os portadores são tanto elétrons como íons positivos do gás, que se deslocam em sentidos opostos sob a ação do campo da descarga. Num eletrólito, como uma solução de HCl em água, os portadores são íons positivos  $H^+$  e negativos  $Cl^-$ .

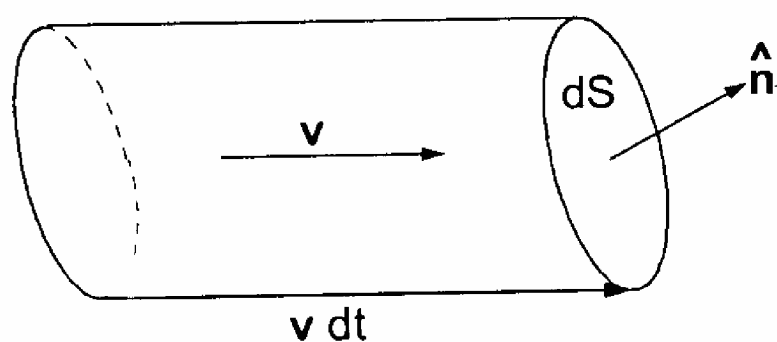


Figura 6.2 Cilindro de carga

Suponhamos primeiro, para simplificar, que os portadores sejam todos do mesmo tipo e se desloquem à mesma velocidade  $\mathbf{v}$ . Nesse caso, a carga total que atravessará  $dS$  durante um intervalo de tempo  $dt$  é a carga contida num cilindro de base  $dS$  e geratrizes  $\mathbf{v}dt$  (fig. 6.2), cujo volume é

$$dv = \mathbf{v}dt \cdot \hat{n} dS$$

Se  $\rho$  é a densidade volumétrica de carga associada aos portadores, a carga total contida em  $dv$  é  $dq = \rho dv$ . Logo, a contribuição à corrente será

$$di = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{n} dS \quad (6.1.3)$$

e, comparando com a expressão acima, vemos que

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (6.1.4)$$

Se a carga dos portadores é  $q$  e a *densidade de portadores* (número de portadores por unidade de volume) é  $n$ , temos

$$\rho = nq \quad (6.1.5)$$

e

$$\mathbf{j} = nq \mathbf{v} \quad (6.1.6)$$

Podemos agora imediatamente generalizar essa expressão a uma situação em que existam diferentes grupos de portadores movendo-se com velocidades diferentes. Se  $n_i$  é o número de portadores com carga  $q_i$  e velocidade  $\mathbf{v}_i$  por unidade de volume ( $i = 1, 2, \dots$ ), teremos

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \quad (6.1.7)$$

onde a soma se estende a todos os grupos de portadores de cargas.

Ex.: sabemos que um corpo macroscópico neutro é formado de cargas (elétrons, prótons, ...) agregadas em átomos e moléculas. Quando esse corpo se desloca como um todo, não há corrente elétrica associada, porque as densidades de corrente associadas a cargas positivas e negativas se cancelam.

## 6.2 Conservação da carga e equação da continuidade

Um princípio tão geral quanto o da conservação da energia e para o qual também não se encontrou até hoje nenhuma violação é o da *conservação da carga elétrica*: a carga *total* (soma *algébrica* das cargas) de um sistema isolado nunca se altera. É possível criar ou aniquilar cargas, mas sempre de forma consistente com esse princípio.

Por exemplo, em processos envolvendo energias elevadas, um elétron e um pósitron (cargas  $-e$  e  $+e$ ) podem sofrer um processo de aniquilação, dando origem a fótons (raios  $\gamma$ ), que são partículas neutras. Reciprocamente, a energia de um fóton de raios  $\gamma$ , passando através da matéria, pode converter-se num par elétron-pósitron (*criação de pares*). Nesses processos, partículas carregadas são criadas ou aniquiladas, mas sempre de forma consistente com a conservação da carga total.

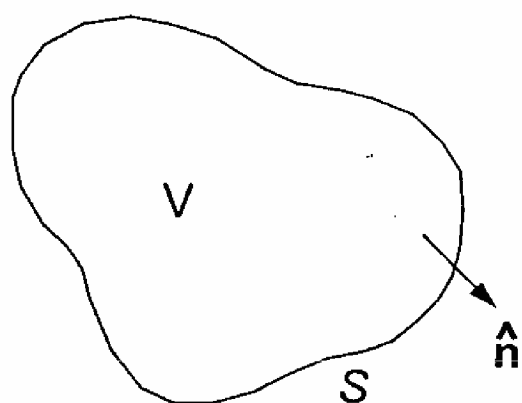


Figura 6.3 Volume de integração

Consideremos então um volume arbitrário  $V$  limitado por uma superfície  $S$ , e seja  $\hat{\mathbf{n}}$  o versor da normal *externa* a  $S$  (fig. 6.3). Pela definição de  $\mathbf{j}$ , o fluxo  $\oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$  representa a quantidade total de carga que *sai* de  $V$  por unidade de tempo através de  $S$ , num dado instante; a quantidade que sai durante um intervalo  $dt$  é

$$dt \oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Mas, pela lei de conservação da carga, isso representa também a *redução*  $-dq$  da carga total contida dentro de  $V$  no instante considerado, ou seja,

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = -\frac{dq}{dt} \quad (6.2.1)$$

onde

$$q = \int_V \rho \, dv \quad (6.2.2)$$

é a carga *total* contida dentro de  $V$  num dado instante ( $\rho$  = densidade volumétrica). Tomando para  $V$  um volume *fixo*,

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv \quad (6.2.3)$$

Por outro lado, pelo teorema da divergência,

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, dv \quad (6.2.4)$$

Identificando as duas expressões, como o resultado deve valer qualquer que seja  $V$ , obtemos a *forma local do princípio de conservação da carga elétrica*.

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.2.5)$$

que se chama *equação da continuidade*. Um resultado análogo se obtém na hidrodinâmica para o escoamento de um fluido (*Física Básica 2*, Seq. 2.2), onde  $\rho$  é a densidade de massa e  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  a corrente; neste caso exprime a conservação da *massa* do fluido.

Um exemplo é a polarização de um dielétrico. Vimos que, neste caso, quando o meio se polariza, cada elemento de superfície,  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} \, dS$  é atravessado por uma quantidade de *carga de polarização*.

$$dq_p = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Logo, a *densidade de corrente de polarização* é

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (6.2.6)$$

Por outro lado, vimos que, num dielétrico inhomogêneo, aparece uma *densidade volumétrica de carga de polarização*  $\rho_p$  dada pela (5.6.12),

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (6.2.7)$$

Desses dois resultados decorre que

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{j}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t}} \quad (6.2.8)$$

ou seja, as cargas de polarização obedecem à equação da continuidade.

Diz-se que uma distribuição de correntes é *estacionária* quando ela não varia com o tempo. Não se usa a expressão "estática" porque correntes estão associadas a cargas em movimento. É o "regime de escoamento" que é estacionário.

Se uma corrente é estacionária, devemos ter  $\partial \rho / \partial t = 0$ ; logo, a equação da continuidade fica

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{j} = 0} \quad (6.2.9)$$

Como sabemos, isso implica que as *linhas de corrente* (linhas de campo do vetor  $\mathbf{j}$ ) não têm fontes nem sorvedouros: ou são *fechadas*, ou teriam de começar e terminar no infinito ("fechadas no infinito"). Outra vez, isso é análogo ao escoamento estacionário de um fluido.

A forma integral desse resultado é

$$\boxed{\int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0} \quad (6.2.10)$$

ou seja, para correntes estacionárias, o fluxo total de corrente através de uma superfície fechada é  $= 0$ : toda a corrente que entra tem de sair. Essa é a origem de uma das *leis de Kirchhoff* na teoria de circuitos elétricos, que veremos no Capítulo 10.

## 6.3 Lei de Ohm e condutividade

A corrente dentro de um meio material resulta da resposta das partículas carregadas deste meio às forças a elas aplicadas; em geral, interessa-nos a resposta a um campo elétrico.

Essa resposta (relação entre  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{E}$ ) depende da natureza do meio material; por isto, chama-se uma *equação constitutiva*. Um exemplo já visto é a relação entre  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}$  num dielétrico: para um meio *linear*, homogêneo e isotrópico, vimos que é dada por  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , onde a susceptibilidade elétrica  $\chi$  é uma constante característica do material.

Para uma grande variedade de materiais *isotrópicos* líquidos e sólidos (não para gases), a relação é dada pela *lei de Ohm* (formulada em 1826, por analogia com a lei de condução do calor):

$$\boxed{\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}} \quad (6.3.1)$$

onde a constante  $\sigma$ , característica do material, chama-se *condutividade* elétrica do material.

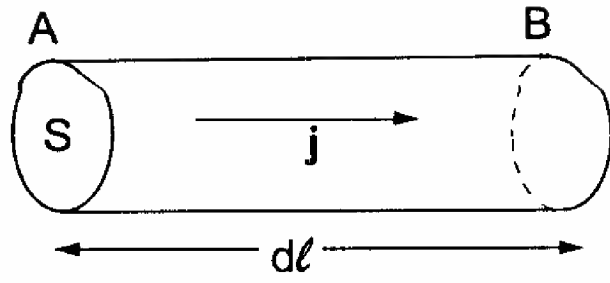


Figura 6.4 Trecho de fio condutor

Consideremos (fig. 6.4), um trecho  $dl$  de um fio condutor de seção transversal  $S$  sobre o qual a corrente  $j$  é longitudinal e homogênea (a mesma em qualquer ponto da seção  $S$ ); pela lei de Ohm, o mesmo acontece com o campo.

A diferença de potencial  $dV$  entre as seções inicial  $A$  e final  $B$  é

$$V_A - V_B \equiv dV = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E dl \quad (6.3.2)$$

pois  $\mathbf{E}$  é uniforme e paralelo a  $d\mathbf{l}$  (note que esta é a *queda* de potencial no sentido da corrente).

Por definição, a *intensidade* da corrente que atravessa esse trecho do fio é

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = j \cdot S = \sigma E S \quad (6.3.3)$$

Logo,

$$dV = \frac{i}{\sigma S} dl \quad (6.3.4)$$

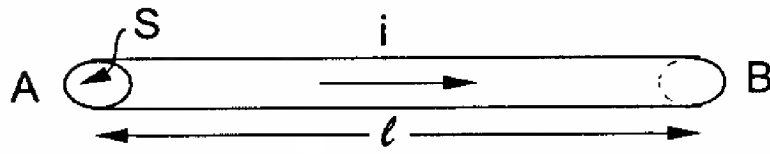


Figura 6.5 Fio de seção constante

e, se o fio tem seção constante, obtemos, para um comprimento  $l$  de fio, entre os pontos  $A$  e  $B$  (fig. 6.5)

$$V_A - V_B \equiv V = R i \quad (6.3.5)$$

onde

$$R = \frac{l}{\sigma S} \equiv \rho \frac{l}{S} \quad (6.3.6)$$

chama-se a *resistência* do fio entre os pontos  $A$  e  $B$ ;  $\rho \equiv 1/\sigma$  é a *resistividade* do material. Vemos que a resistência de uma porção do fio é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área da seção transversal do fio.

A unidade de medida da resistência chama-se *ohm* e representa-se por  $\Omega$ :

$$1\Omega = \frac{1V}{1A} \quad (6.3.7)$$

ou seja, uma corrente de 1A produz, numa resistência de  $1\Omega$ , uma queda de potencial de 1V. Como  $[\rho] = [R] \cdot [L]$ , a unidade de medida de  $\rho$  é  $1\Omega\cdot\text{m}$  (ohm-metro).

Para uma ampla gama de substâncias, é um fato experimental que a resistividade varia, com boa aproximação, *linearmente* com a temperatura, dentro de uma larga faixa de temperaturas:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (6.3.8)$$

onde  $\rho$  é a resistividade à temperatura  $T$  e  $\rho_0$  é a resistividade à temperatura  $T_0$ . A constante  $\alpha$  chama-se *coeficiente de temperatura* da resistividade. É geralmente positiva para metais ( $\rho$  aumenta com  $T$ ), mas assume valores negativos para materiais *semicondutores*. Consideraremos geralmente temperaturas não muito distantes da temperatura ambiente. A temperaturas geralmente bem mais baixas, podem ocorrer efeitos novos, tais como a *supercondutividade*, o desaparecimento brusco da resistência abaixo de uma temperatura crítica (Seç. 6.6).

A resistividade varia por muitas ordens de grandeza conforme a natureza do material, sendo casos extremos os bons condutores, como o cobre, e isolantes como o quartzo, cujas resistividades diferem por fatores  $> 10^{20}$  !

	Material	$\rho$ a $20^\circ\text{C}$ em $\Omega - \text{m}$	$\alpha$ (a $20^\circ\text{C}$ )
Metais {	Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$	$\sim 4 \times 10^{-3}$
	Prata	$1,6 \times 10^{-8}$	$\sim 4 \times 10^{-3}$
	Alumínio	$2,8 \times 10^{-8}$	$\sim 4 \times 10^{-3}$
	Ferro	$10 \times 10^{-8}$	$\sim 5 \text{ a } 6 \times 10^{-3}$
	Chumbo	$22 \times 10^{-8}$	$\sim 4 \times 10^{-3}$
Semicondutores {	Silício puro	$\sim 3 \times 10^3$	$\sim -7 \times 10^{-2}$
	Germânio	$\sim 10$	$\sim -5 \times 10^{-2}$
Isolantes {	Vidro	$\sim 10^{10} \text{ a } 10^{14}$	
	Quartzo fundido	$\sim 10^{16}$	
	Papel	$\sim 10^{12} \text{ a } 10^{16}$	
	Borracha dura	$\sim 10^{16}$	

}  $\alpha < 0$

## 6.4 Modelo cinético para a lei de Ohm

Embora modelos microscópicos para a origem de constantes materiais devam basear-se na mecânica quântica, é útil ter uma idéia qualitativa da origem da lei de Ohm, ainda que com base na física clássica, da mesma forma que é útil construir um modelo microscópico de um gás na teoria cinética dos gases, com base na mecânica clássica. Entretanto, é preciso estar sempre consciente das limitações de um tal modelo (cf. Seção 6.5).

Vimos que uma corrente de 1A corresponde à passagem de  $\sim 10^{19}$  elétrons por segundo através da seção de um fio condutor. Num metal como o cobre, *um* elétron por átomo (elétron de valência) está muito fracamente ligado ao resto do átomo e "perambula" pela rede cristalina, o que levou à idéia de "elétrons livres" como portadores de carga na corrente de condução metálica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Densidade do cobre : } 8,92 \text{ g/cm}^3 \\ \text{Massa atômica do cobre } \approx 63,5 \Rightarrow 1 \text{ mol} = 63,5 \text{ g} \end{array} \right\} n.^{\circ} \text{ de moles / cm}^3 = \frac{8,92}{63,5}$$

$$\text{Número de átomos/mol} = A = 6,02 \times 10^{23}$$

$$\frac{\text{número de átomos}}{\text{cm}^3} = 6,02 \times 10^{23} \times \frac{8,92}{63,5} \approx 8,5 \times 10^{22}$$

ou seja,

$$n \approx 8,5 \times 10^{28} \text{ elétrons / m}^3, \text{ para o cobre} \quad (6.4.1)$$

Logo, os números de portadores com que estamos lidando são da mesma ordem que números típicos da teoria cinética dos gases, e esperamos aqui também que grandezas macroscópicas como a corrente e a condutividade tenham de ser obtidas por métodos estatísticos, a partir de *valores médios de grandezas microscópicas*. Podemos pensar num "gás de elétrons livres" contido num "recipiente", que é o material condutor.

Nesse caso, em que há um único tipo de portadores, de carga  $(-e)$ , a expressão para a corrente ficaria

$$\boxed{j = -ne\langle v \rangle} \quad (6.4.2)$$

onde  $\langle v \rangle$  é o valor médio da velocidade adquirida pelos elétrons sob a ação do campo  $E$ . A lei de Ohm resulta se  $\langle v \rangle$  for proporcional a  $E$ .

À primeira vista, isso parece peculiar, pois poderíamos pensar que a *aceleração* média, e não a velocidade média, fosse afetada pela força externa  $eE$ . Entretanto, conhecemos na mecânica um caso em que aparece uma velocidade proporcional a uma força externa constante: é o movimento de uma partícula num meio viscoso, com atrito interno proporcional à velocidade (por exemplo, a queda livre de uma bilha num líquido viscoso).

Nesse caso, para um valor bem definido da velocidade, a resistência de atrito compensa exatamente a força externa, e esta *velocidade terminal* (proporcional à força externa) se mantém constante.

Se estimássemos classicamente (sabendo de antemão que o resultado não é confiável) a velocidade quadrática média de agitação térmica dos elétrons à temperatura ambiente  $T$ , obteríamos

$$\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k T \quad \left\{ \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k T}{m_e}} \approx \sqrt{\frac{3 \times (1,38 \times 10^{-23}) \times 300}{9,1 \times 10^{-31}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right.$$

ou seja,

$$v_{qm} \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 1,17 \times 10^5 \text{ m/s} \quad (6.4.3)$$

Efetivamente essa estimativa não é correta: a mecânica quântica dá para os elétrons de condução no cobre uma velocidade térmica típica uma ordem de grandeza maior, a *velocidade de Fermi*  $v_F \approx 1,57 \times 10^6 \text{ m/s}$  à temperatura ambiente (Seç. 6.5).

Por outro lado, estimemos a velocidade  $\langle v \rangle$  associada à corrente, para uma corrente de 1A num fio de cobre de 2 mm de raio:

$$\begin{aligned} j &= \frac{i}{S} = \frac{1 \text{ A}}{\pi \times 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{1 \text{ C/s}}{1,26 \times 10^{-5} \text{ m}^2} \sim 8 \times 10^4 \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{ s}} \\ &= ne \langle v \rangle = 8,5 \times \frac{10^{28}}{\text{m}^3} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \langle v \rangle \sim 1,36 \times 10^{10} \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \langle v \rangle \end{aligned}$$

o que dá

$$\langle v \rangle \approx 6 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,006 \text{ mm/s} \sim 2 \text{ cm/h!}$$

ou seja, a velocidade média adquirida sob a ação do campo é, tipicamente, mais de dez ordens de grandeza menor do que a velocidade típica de agitação térmica.

Podemos comparar a situação à de um enxame de abelhas voando rapidamente em todas as direções e sendo arrastado muito devagar por uma brisa suave.

Dado o elevado valor de  $n$  e de  $v_{qm}$ , deve haver um número extremamente elevado de colisões por segundo, levando a variações de momento por colisão muito superiores a  $m_e \langle v \rangle$ , a magnitude média do momento devida à ação do campo. Se  $\tau$  é o *intervalo de tempo médio entre duas colisões*, este momento adquirido é dado por  $-e \mathbf{E} \langle \tau \rangle$  (pois a única força que atua sobre o elétron entre duas colisões é  $-e \mathbf{E}$ ), o que dá



$$m_e \langle \mathbf{v} \rangle = -e \mathbf{E} \langle \tau \rangle \quad \left\{ \quad \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \langle \tau \rangle \right.$$

Pela (6.4.1), resulta

$$\mathbf{j} = n \frac{e^2}{m_e} \langle \tau \rangle \mathbf{E}$$

que é a lei de Ohm, com

$$\boxed{\sigma = n \frac{e^2}{m_e} \langle \tau \rangle} \quad (6.4.4)$$

Para o cobre a 20°C, temos, pela (6.4.1) e pela tabela da Seção 6.3,

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{1,7 \times 10^{-8}} = \underbrace{8,5 \times 10^{28}}_n \times \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31}} \langle \tau \rangle$$

$$\therefore \langle \tau \rangle \approx \frac{9,1 \times 10^{-31}}{1,7 \times 8,5 \times (1,6)^2 \times 10^{-18}} \text{ s} \quad \left\{ \quad \langle \tau \rangle \approx 2,5 \times 10^{-14} \text{ s} \right.$$

O *livre caminho médio* entre duas colisões é dado por

$$\langle l \rangle \approx v_F \langle \tau \rangle \approx 1,57 \times 10^6 \times 2,5 \times 10^{-14} \text{ m} \approx 3,9 \times 10^{-8} \text{ m} = 390 \text{ \AA}$$

o que equivale a  $\sim 10^2$  espaçamentos entre os átomos na rede cristalina (para o cobre, o espaçamento é de 2,6 Å). Por conseguinte, a imagem clássica de que as colisões responsáveis pelo "atrito" (resistividade) do meio seriam colisões entre os elétrons livres e os íons  $\text{Cu}^+$  da rede, não funciona: a rede é muito mais "transparente" aos elétrons do que seria previsível nesta imagem clássica (note que uma colisão aqui não corresponde ao choque de bolas de bilhar, mas ao *espalhamento* dos elétrons pelos íons, levando a mudanças de direção).

Outro defeito grave do modelo clássico de elétrons livres, já comentado no curso de termodinâmica (*Física Básica 2*, Seç. 1.5), é que cada elétron livre tem 3 graus de liberdade de translação, devendo portanto, pelo teorema de equipartição da energia, existir uma contribuição dos elétrons livres de  $3/2 R$  ao calor específico molar. Essa contribuição, que se somaria aos  $(6/2) R = 3 R$  da lei de Dulong e Petit, não é porém observada.

A própria idéia de que os elétrons possam ser tratados como livres, confirmada pela "transparência" da rede cristalina ao seu movimento encontrada acima, é incompreensível classicamente, pois esperaríamos que seu livre caminho médio fosse da ordem do espaçamento entre os sítios da rede, e não duas ordens de grandeza maior.

Conforme havíamos antecipado, essas dificuldades são sintomáticas da impossibilidade de tratar pela física clássica propriedades de meios materiais que dependem de sua estrutura microscópica. Para tratá-las, é indispensável empregar a física quântica.

## 6.5 Propriedades ondulatórias dos elétrons

Uma introdução à física quântica será objeto do próximo volume deste curso (*Física Básica 4*). Entretanto, vamos antecipar aqui, de forma apenas qualitativa, alguns resultados que serão tratados mais tarde com maior detalhe.

Até o final do século passado, acreditava-se que as propriedades da luz haviam sido bem explicadas pela *teoria ondulatória*, especialmente depois que Maxwell identificou a luz com ondas eletromagnéticas.

Entretanto, isso levava a graves dificuldades quando se procurava explicar o espectro da radiação emitida por um corpo aquecido (sabemos que um corpo incandescente se torna luminoso, e que a cor predominante na luz emitida varia com a temperatura). Foi para sobrepujar essas dificuldades que Max Planck introduziu em 1900 sua "hipótese dos quanta", segundo a qual a energia da radiação eletromagnética de frequência  $\nu$  emitida ou absorvida por um corpo aquecido não poderia variar continuamente, mas somente por múltiplos inteiros de um "quantum de energia".

$$E = h \nu \quad (6.5.1)$$

onde  $h$  é uma nova constante universal, a *constante de Planck*,

$$h \cong 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (6.5.2)$$

Diz-se que a energia da radiação é "*quantizada*"

Em 1905, Albert Einstein mostrou que era possível explicar o *efeito fotoelétrico* (o fato de que a luz ultravioleta ejeta elétrons quando incide sobre um metal) empregando uma hipótese ainda mais arrojada que a de Planck, a de que a radiação eletromagnética de frequência  $\nu$  *consiste* de "quanta" de energia  $h\nu$ , depois chamados de *fótons*, comportando-se como partículas. Era de certa forma um retorno a uma teoria corpuscular da luz, mas convivendo com propriedades ondulatórias, como se vê pela própria relação  $E = h \nu$ , onde  $\nu$  é a frequência de uma onda.

Essa relação entre energia e frequência da luz foi empregada por Niels Bohr em 1913, no seu modelo do átomo de hidrogênio, levando a uma explicação do espectro deste elemento.

Em 1923, o físico francês Louis de Broglie sugeriu que o duplo caráter, ondulatório e corpuscular da luz, deveria ser uma propriedade de toda a matéria. Assim,

partículas como os elétrons deveriam também ter propriedades ondulatórias. Por analogia com os resultados de Einstein para os fótons, de Broglie propôs que existisse uma relação entre o comprimento de onda  $\lambda$  da onda associada a um elétron *livre* e a magnitude  $p$  do *momento* deste elétron:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (6.5.3)$$

onde  $\lambda$  chama-se *comprimento de onda de de Broglie* do elétron.

A hipótese de de Broglie foi comprovada experimentalmente entre 1925 e 1927, através de experiências de difração de elétrons (difração é um efeito tipicamente ondulatório, que também será estudado posteriormente: cf. *Física Básica 4*).

Sabemos que ondas clássicas *confinadas* numa certa região do espaço são fortemente afetadas pelas condições na fronteira desta região (*condições de contorno*).

Assim, por exemplo, uma corda vibrante presa nas extremidades (fig. 6.6) só pode oscilar em um conjunto *discreto* de *modos normais de vibração* (*Física Básica 2*, Seq. 5.7), cujos semi-comprimentos de onda são submúltiplos inteiros do comprimento  $l$  da corda:

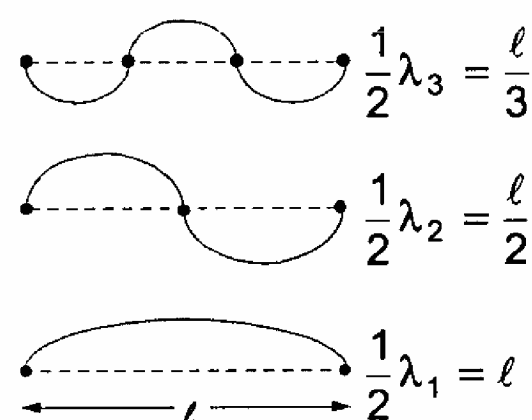


Figura 6.6 Modos de vibração

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.5.4)$$

Vimos que valem resultados análogos para ondas confinadas em mais dimensões, por exemplo, num tubo de órgão ou cavidade acústica ressonante.

Estendendo esse resultado a um elétron confinado em uma dimensão, teríamos, pela relação de de Broglie, que o momento do elétron só pode assumir os valores

$$p_n = \pm \frac{h}{\lambda_n} = \pm n \frac{h}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.5.5)$$

correspondendo às energias ( $E = p^2 / 2m$  para um elétron livre, onde  $m$  é a massa do elétron).

$$E_n = \frac{1}{2m} p_n^2 = n^2 \cdot \frac{h^2}{2ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.5.6)$$

ou seja, obtemos *quantização da energia* (níveis de energia discretos) como consequência do *confinamento* das ondas de de Broglie associadas ao elétron.

Esse é um resultado geral: *partículas quânticas confinadas têm níveis de energia discretos*, ou, como se diz também, um *espectro discreto* de energia. Isso se aplica, em particular, a um elétron confinado num átomo ou molécula. Também se aplica a fótons confinados dentro de uma cavidade metálica, como uma cavidade ressonante de micro-ondas, por exemplo.

Entretanto, a teoria quântica mostra que há uma diferença básica entre fótons e elétrons. Nada impede que exista um número arbitrariamente grande de fótons num mesmo *estado quântico*, no mesmo nível de energia. Assim, por exemplo, uma onda eletromagnética dentro de uma cavidade de microondas pode conter  $\sim 10^{20}$  fótons, todos no mesmo *modo* da cavidade (o análogo de uma configuração da corda vibrante com um dado valor de  $n$  no exemplo acima).

Para elétrons, porém, isso não vale. Wolfgang Pauli formulou em 1925 o *princípio de exclusão*, segundo o qual *não pode haver mais de um elétron ocupando um dado estado quântico*. O estado quântico de um elétron, porém, não é especificado somente por variáveis como a energia, mas inclui também a orientação do seu *spin* (um momento angular intrínseco do elétron), variável quântica que pode assumir dois valores opostos, como  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . Assim, dois elétrons de spins opostos podem ocupar o mesmo nível de energia.

Imaginemos, para simplificar, que se tenha uma amostra de um metal sob a forma de um *cubo de aresta*  $L$ , e vejamos quais são os efeitos, sobre o espectro de níveis de energia dos elétrons livres nesta amostra, do fato de estarem *confinados* a ela, levando em consideração o princípio de Pauli. Inicialmente, não consideraremos o efeito da temperatura, supondo que a amostra está à temperatura  $T = 0$  (na escala K); seja  $N$  o *número total de elétrons livres* na amostra.

Devido ao confinamento, as componentes  $(p_x, p_y, p_z)$  do momento  $\mathbf{p}$  do elétron só variarão por valores discretos, da ordem de  $h/L$ , como na (6.5.5), de forma que *um nível de energia eletrônico ocupa um volume*

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \left(\frac{h}{L}\right)^3 = \frac{h^3}{V} \quad (6.5.7)$$

no "espaço dos momentos" (o espaço de coordenadas  $p_x, p_y, p_z$ ), onde  $V = L^3$  é o volume da amostra.

Pelo princípio de Pauli, só podemos acomodar dois elétrons (de spins opostos) nesse nível. Por outro lado, à temperatura  $T = 0$ , queremos minimizar a energia total dos elétrons, que é a soma de suas energias cinéticas, colocando os pontos  $(p_x, p_y, p_z)$  representativos de cada elétron tão próximos da origem ( $p_x = p_y = p_z = 0$ ) quanto possível.

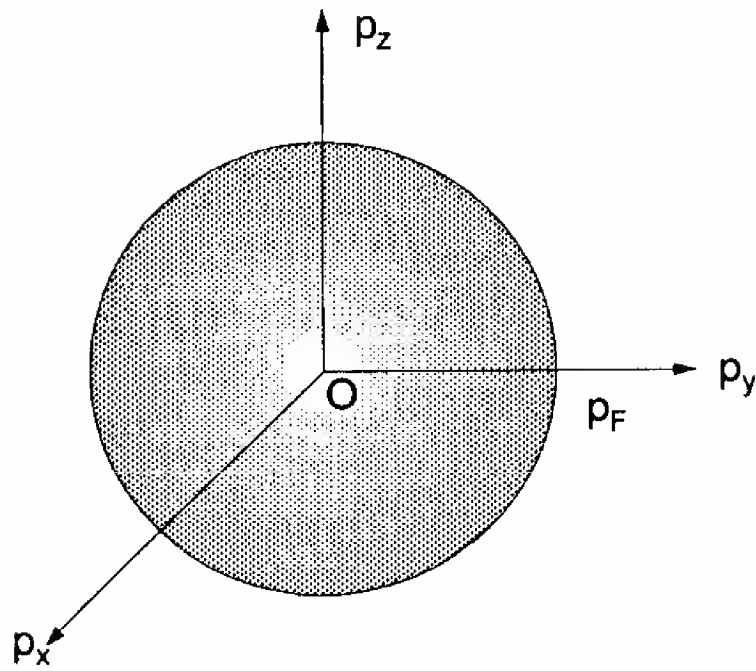


Figura 6.7 A esfera de Fermi

O melhor que podemos fazer, dada a limitação acima, é situá-los, em células de volume  $h^3/V$  cada uma, com 2 elétrons em cada célula, dentro de uma esfera de raio  $p_F$  com centro na origem (fig. 6.7), onde

$$2 \frac{\frac{4}{3} \pi p_F^3}{(h^3/V)} = N \quad (6.5.8)$$

é o número total de elétrons livres contido na amostra.

O momento  $p_F$  chama-se *momento de Fermi*.

A relação acima dá

$$p_F^3 = \frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} h^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} p_F = h \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} \end{array} \right. \quad (6.5.9)$$

onde  $n \equiv N/V$  é a *densidade volumétrica* de elétrons livres.

Para o cobre, vimos na (6.4.1) que  $n \equiv 8,5 \times 10^{28}$  elétrons/m<sup>3</sup>. Logo, a *velocidade de Fermi*,

$$v_F \equiv \frac{p_F}{m} \quad (6.5.10)$$

onde  $m$  é a massa do elétron, é dada por

$$v_F = \frac{h}{m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3} = \frac{6,6 \times 10^{-34}}{9,1 \times 10^{-31}} \left( \frac{3}{8\pi} \times 8,5 \times 10^{28} \right)^{1/3} \text{ m/s}$$

o que dá

$$v_F \equiv 1,57 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.5.11)$$

o valor citado na Seq. 6.4.

A energia máxima dos elétrons livres à temperatura  $T = 0$  é a *energia de Fermi*, dada por

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{1}{2} m v_F^2 \quad (6.5.12)$$

o que, para o cobre, dá

$$E_F = \frac{1}{2} \times 9,1 \times 10^{-31} \times (1,57)^2 \times 10^{12} \text{ J} \approx 11,2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

ou, medindo-a em eV ( $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ),

$$E_F \approx 7 \text{ eV} \quad (6.5.13)$$

Convém comparar esse resultado com a energia térmica média à temperatura ambiente, dada por

$$\frac{3}{2} k T \approx \frac{3}{2} \times (1,38) \times 10^{-23} \times 300 \text{ J} \approx 6,21 \times 10^{-21} \text{ J} \approx 0,04 \text{ eV} \approx \frac{1}{25} \text{ eV} \quad (6.5.14)$$

Vemos que  $E_F$  é duas ordens de grandeza maior, o que é consistente com o resultado uma ordem de grandeza maior para  $v_F$ , em relação à velocidade quadrática média clássica de uma partícula em equilíbrio térmico a  $T = 300 \text{ K}$ .

Podemos assim ter uma idéia de como é a *distribuição de energia* dos elétrons livres à temperatura  $T = 0$ , e de como ela evolui com a temperatura. Como  $N$  é um número da ordem do número de Avogadro, o intervalo de energia entre dois níveis consecutivos é muito pequeno, de modo que podemos tratar a energia  $E$  como uma variável "quase-contínua".

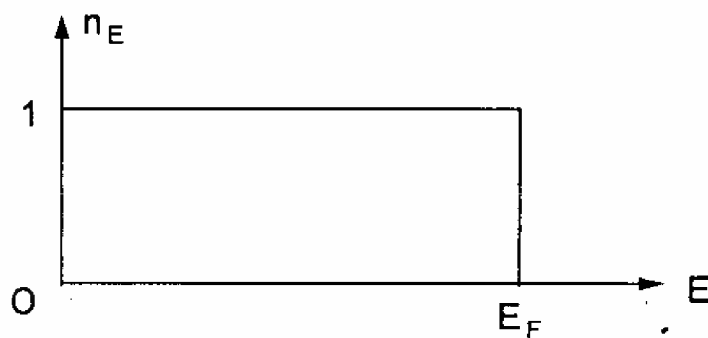
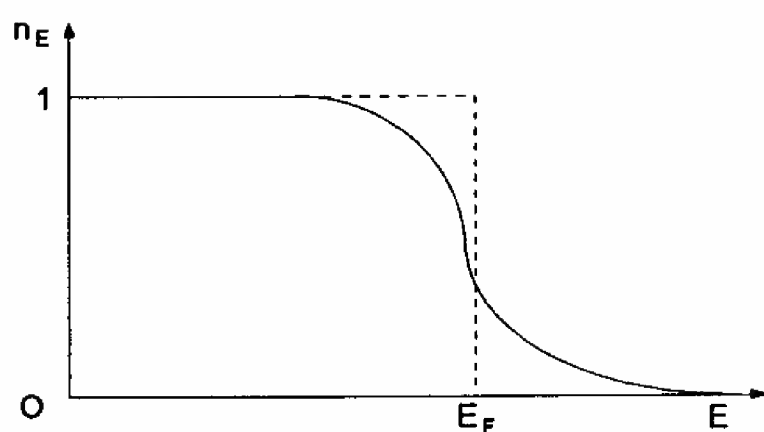


Figura 6.8 Distribuição de Fermi para  $T = 0$

Seja  $n_E$  o número médio de elétrons no nível de energia  $E$  com uma dada orientação do spin:  $0 \leq n_E \leq 1$ , e cada nível acomoda no máximo dois elétrons de spins opostos. Para  $T = 0$ ,  $n_E$  tem o aspecto da fig. 6.8: todos os níveis com  $E \leq E_F$  estão ocupados (cada um por um par de elétrons), e todos os níveis com

$E > E_F$  estão vazios. A distribuição da fig. 6.8 é a *distribuição de Fermi* para  $T = 0$ ; vemos que é totalmente diferente da distribuição clássica de Maxwell-Boltzmann para um gás de partículas livres (*Física Básica 2*, Seq. 12.2). Embora seja  $T = 0$ , os elétrons se movem em todas as direções com velocidades variáveis de 0 a  $v_F$  (preenchendo a esfera de Fermi no espaço dos momentos).

Que acontece para  $T > 0$ ? A energia térmica média ganha por cada elétron é  $\sim kT$ , que, como vimos, é  $\ll E_F$  à temperatura ambiente. Os elétrons com energia  $< E_F - kT$  não podem passar do nível onde estão a níveis  $kT$  acima, porque todos estes níveis já estão ocupados (princípio de Pauli). Só elétrons numa "casquinha" de espessura  $\sim kT$  abaixo da superfície de Fermi podem ser "promovidos" a níveis superiores, de energia  $> E_F$ , porque só estes estão vazios.

Figura 6.9 Distribuição de Fermi para  $T > 0$ 

Logo, o aspecto da distribuição de Fermi para  $T > 0$ , tipicamente, é o que está representado na fig. 6.9, com um ligeiro arredondamento do degrau e uma pequena cauda de elétrons ocupando níveis de energia  $E > E_F$ , e deixando "lacunas" desocupadas dentro de uma faixa de espessura  $\sim kT$  abaixo\* de  $E_F$ .

Como somente uma fração  $\sim kT/E_F$  dos elétrons é excitada a níveis mais altos, o acréscimo na energia interna devido ao aquecimento é  $\sim kT \cdot (kT/E_F) = (kT)^2/E_F$ , e o calor específico eletrônico por mol é menor do que  $\frac{3}{2}R$  por um fator  $\sim kT/E_F$ , sendo pois desprezível à temperatura ambiente, o que explica imediatamente por que os elétrons livres não contribuem ao calor específico do metal.

O princípio de Pauli tem outra consequência extremamente importante. Até aqui, tratamos os elétrons como partículas livres, confinadas dentro do volume  $L^3$  do metal (esquecendo inteiramente do resto da rede cristalina, cujo efeito discutiremos abaixo). Mas estamos desprezando também os efeitos da interação coulombiana repulsiva entre os elétrons, que deveriam levar suas trajetórias a se desviarem umas das outras (colisões). Quando dois elétrons de momentos iniciais  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  colidem, deveriam passar a ter momentos finais  $\mathbf{p}'_1$  e  $\mathbf{p}'_2$  diferentes dos iniciais. Mas, em geral, os estados associados aos momentos  $\mathbf{p}'_1$  e  $\mathbf{p}'_2$  já estarão ocupados por outros elétrons, de forma que o princípio de Pauli proíbe a colisão. Assim, *a interação entre os elétrons é fortemente inibida pelo princípio de Pauli*, o que contribui para justificar o tratamento dos elétrons como se fossem livres.

## 6.6 Espectro de bandas: condutores, isolantes e semicondutores

Vejamos agora qual é o efeito exercido sobre os elétrons de valência (um elétron por átomo, no caso do cobre), devido a todo o resto da rede cristalina na qual se movem, formada pelos "íons" de cobre (átomos despidos do elétron de valência, com carga efetiva  $+e$ ).

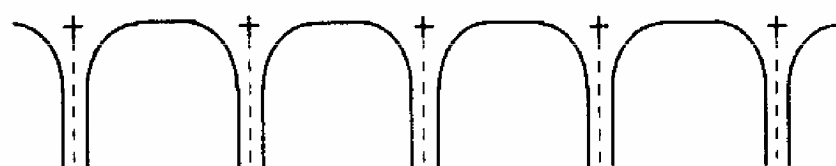


Figura 6.10 Potencial devido à rede

Quando um elétron se desloca ao longo de uma fileira de "íons", o potencial sentido por ele tem o aspecto da fig. 6.10: ele é atraído pela interação coulombiana, para as posições  $+$  dos "íons" (sítios da rede).

\* Na realidade  $E_F$  é definido, para  $T > 0$ , como a energia para a qual  $n_E$  se torna  $= 1/2$ , de modo que  $E_F$  também varia ligeiramente com  $T$ , mas essa variação é desprezível à temperatura ambiente.

Uma característica básica desse potencial é a sua *periodicidade espacial* em 3 dimensões, que é a periodicidade da rede cristalina. Ela dá origem a um efeito que, de novo, é tipicamente *ondulatório*: a existência de faixas do comprimento de onda que não podem propagar-se através da estrutura – intervalos onde a propagação é proibida. Esse efeito é encontrado na propagação de quaisquer tipos de ondas (inclusive na física clássica) em quaisquer estruturas periódicas. Um exemplo (filtros) será visto mais adiante (Seç. 10.9).

Devido à relação de de Broglie, o comprimento de onda, na física quântica, está relacionado com a *energia* das partículas, de forma que os intervalos proibidos são aqueles onde não podem existir *níveis de energia* dos elétrons.

Daí resulta que os estados quânticos dos elétrons na rede cristalina, além de discretos (devido ao confinamento no interior do metal), agrupam-se em *bandas ou faixas de energia*, separadas por *intervalos proibidos*, que não contêm níveis. Diz-se que os elétrons têm um *espectro de bandas*.

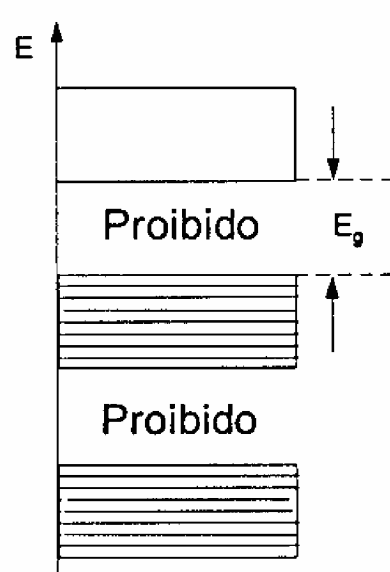


Figura 6.11 Bandas de energia num isolante

Com base nesse resultado e no princípio de Pauli, podemos entender a origem das diferenças entre isolantes, condutores e semicondutores.

Num *isolante* típico, as bandas de energia mais baixas têm seus níveis *totalmente preenchidos* pelos elétrons (2 de spins opostos em cada nível, de conformidade com o princípio de Pauli). O nível mais alto preenchido está separado do nível mais baixo da camada seguinte por um

*intervalo proibido* de largura  $E_g$  (fig. 6.11). Para isolantes típicos,  $E_g$  é da ordem de alguns eV.

A distribuição estatística dos elétrons sobre os níveis de energia, quando estão em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ , é bastante diferente na física quântica do que seria classicamente, como vimos para a distribuição de Fermi com  $T = 0$ . Entretanto, ainda tem importância decisiva o *fator de Boltzman*  $e^{-E/kT}$ , onde  $E$  é a energia e  $k$  a constante de Boltzman (*Física Básica 2*, Seç. 12.2).

Assim, a probabilidade de que um elétron consiga, por excitação térmica, transpor o intervalo de largura  $E_g$  entre a banda mais alta preenchida (chamada *banda de valência*) e a mais baixa contígua, vazia (chamada *banda de condução*) resulta ser da ordem de

$$p \sim e^{-E_g/(2 k T)} \quad (6.6.1)$$



Como vimos,  $kT \sim 1/40 \text{ eV}$  à temperatura ambiente ( $T = 300\text{K}$ ). Logo, para  $E_g \sim 5 \text{ eV}$ , temos  $p \sim e^{-100} \sim 10^{-44}$ , o que é praticamente desprezível. Assim, num isolante, os elétrons permanecem *ligados* aos sítios da rede, não havendo portadores de corrente disponíveis. Daí porque a resistividade de um bom isolante pode ser até  $\sim 10^{30}$  vezes maior que a de um bom condutor.

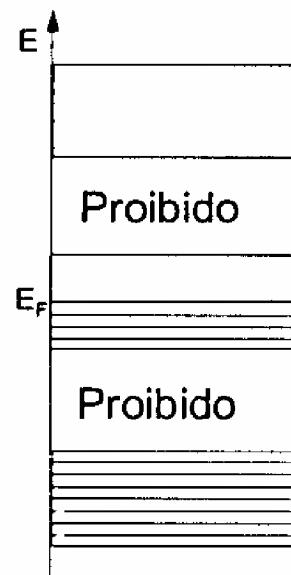


Figura 6.12 Bandas de energia num metal

Num *metal* típico, a banda mais elevada onde há elétrons encontra-se apenas *parcialmente preenchida* (fig. 6.12), até uma energia  $E_F$  que corresponde ao *nível de Fermi*, para  $T = 0$ .

Para  $T > 0$ , a energia térmica  $\sim kT$  é suficiente para excitar os elétrons na vizinhança de  $E_F$  a níveis contíguos desocupados; estes são os elétrons livres, de velocidade  $\sim v_F$ , que podem servir como portadores da corrente.

Que acontece se aplicarmos um campo elétrico ao metal? O resultado obtido no modelo de Drude, de que a condutividade  $\sigma$  é diretamente proporcional ao *tempo livre médio*  $\langle \tau \rangle$  entre duas colisões, permanece válido na teoria quântica. Mas o conceito de colisão é profundamente modificado quando levamos em conta as propriedades ondulatórias do elétron.

Para uma onda, uma "colisão" com um obstáculo perturba sua propagação e resulta na geração de ondas *espalhadas* em todas as direções. É o que acontece com as ondas eletromagnéticas da luz solar ao atravessar a atmosfera da Terra: a luz que recebemos do céu é luz solar espalhada (para ver luz direta, teríamos que olhar na direção do Sol).

Mas, numa rede cristalina perfeitamente periódica, as ondas de de Broglie dos elétrons livres propagam-se livremente, (adaptando-se à periodicidade, o que leva a uma "massa efetiva" para o transporte da corrente), sem produzir espalhamento. Assim, num cristal perfeito ideal, teríamos  $\langle \tau \rangle \rightarrow \infty$  e por conseguinte  $\sigma \rightarrow \infty$ : ele seria um condutor perfeito, de resistividade nula!

Entretanto, mesmo no limite de temperatura  $T \rightarrow 0$ , nenhum cristal real possui uma rede cristalina perfeita: sempre existem *defeitos e impurezas* que espalham as ondas eletrônicas e dão origem a uma "resistividade residual"  $\rho_0 > 0$ .

Para  $T > 0$ , os íons da rede *vibram* em torno das suas posições de equilíbrio, contribuindo para o espalhamento dos elétrons e para a resistividade. Essa contribuição cresce com  $T$ , explicando o crescimento de  $\rho$  com  $T$ . As vibrações da rede estão associadas com ondas sonoras, que na teoria quântica correspondem a *fônons*, de modo que esta contribuição está associada à interação entre elétrons e fônons. Conforme veremos abaixo, esse é o mecanismo de dissipação de energia associado ao efeito Joule (geração de calor pela passagem da corrente), que discutiremos na Seq. 6.7.

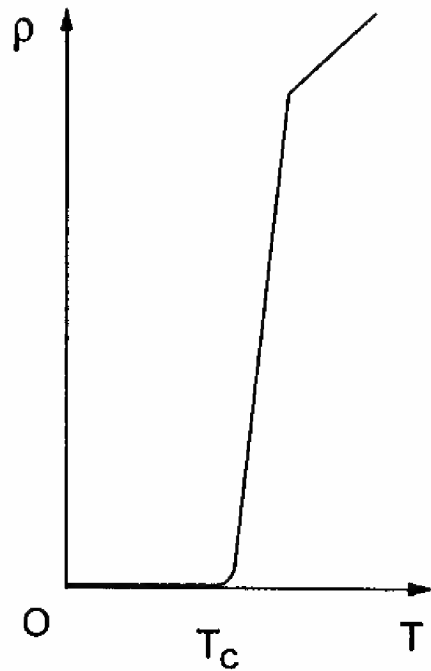


Figura 6.13 Resistividade do mercúrio em baixas temperaturas

Para temperaturas suficientemente baixas, da ordem de alguns graus K, diversos materiais tornam-se *supercondutores*. Esse fenômeno foi descoberto em 1911 por Kammerlingh Onnes, em Leiden, quando estudava a variação com  $T$  da resistividade do mercúrio. Baixando  $T$ , verifica-se que, a uma *temperatura crítica*  $T_c$  (para Hg, tem-se  $T_c \cong 4,15$  K), a resistividade cai abruptamente para zero (fig. 6.13), permitindo obter *correntes persistentes*, que podem manter-se por tempos muito longos, sem dissipação.

O mecanismo responsável pela supercondutividade permaneceu um mistério até 1957, quando foi elucidado (nos casos até então conhecidos) por Bardeen, Cooper e Schrieffer, o que lhes valeu o Prêmio Nobel. Ele resulta também de uma interação entre elétrons e a rede (fônons).

Um elétron tende a atrair para si os íons positivos, deformando ligeiramente a rede em torno dele. Um segundo elétron tende a ser atraído para essa região mais positiva. Em circunstâncias apropriadas, essa *atração efetiva* entre dois elétrons liga um ao outro, de tal forma que se requer uma energia mínima para dissociar este par de elétrons ("par de Cooper"). A baixas temperaturas, a energia térmica não é suficiente para dissociá-los, e eles se tornam insensíveis a colisões, permitindo transportar corrente "sem atrito" (com  $\rho = 0$ ).

Até recentemente, só se conheciam substâncias em que  $T_c$  era no máximo  $\sim 20$  K, mas, a partir dos trabalhos de K. A. Müller e J. G. Bednorz, que lhes proporcionaram o Prêmio Nobel de 1987, vem sendo desenvolvida uma nova classe de supercondutores, com  $T_c$  elevado, aproximando-se cada vez mais da temperatura ambiente, com grande potencial de aplicações. Entretanto, o mecanismo da supercondutividade nesses novos materiais ainda não foi bem elucidado.

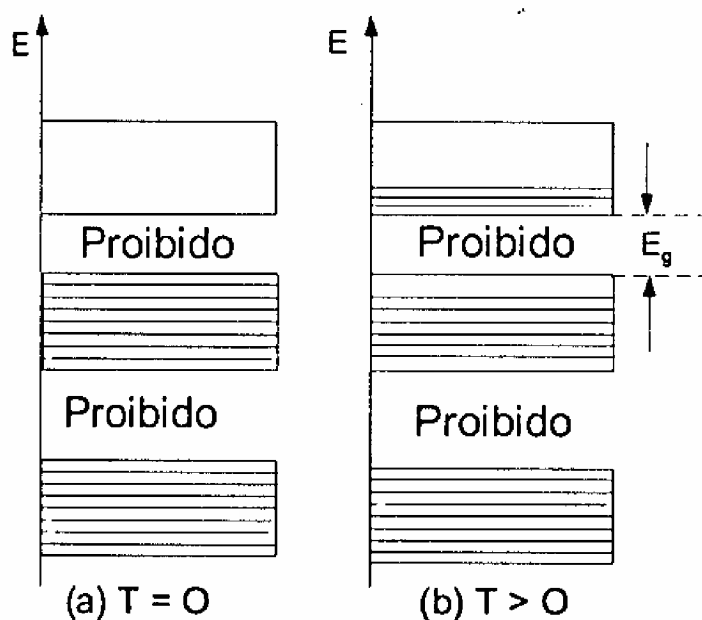


Figura 6.14 Espectro de bandas em semicondutores

Finalmente, num *semicondutor intrínseco* (material puro), a baixas temperaturas ( $T \rightarrow 0$ ), a situação é análoga à de um isolante, com a banda de valência toda preenchida e a de condução vazia, mas o *intervalo*  $E_g$  que separa uma da outra é relativamente pequeno, da ordem de 0,5 eV [fig. 6.14(a)].

Assim, à temperatura ambiente,

$$e^{-E_g/(2kT)} \sim e^{-10} \sim 5 \times 10^{-5}$$

o que implica numa fração significativa dos elétrons termicamente excitada para a banda de condução [fig. 6.14(b)]. Isso leva a condutividades típicas à temperatura ambiente pelo menos  $10^{10}$  vezes maiores que as dos isolantes.

Como o fator de Boltzmann é extremamente sensível à temperatura, é ele que produz o efeito dominante sobre a resistividade. Com o aumento de  $T$ , aumenta rapidamente a densidade  $n$  de portadores de corrente, e  $\sigma$  cresce com  $n$  [cf.(6.4.4)].

Isso explica por que  $\alpha$ , o coeficiente de temperatura da resistividade, é negativo para semicondutores (tabela da Seç. 6.3). É verdade que quando  $T$  aumenta, também diminui, como no caso de um metal, o tempo livre médio  $\langle \tau \rangle$  entre colisões, o que atua em sentido inverso. Entretanto, o efeito da variação de  $n$  com  $T$  é bem mais forte (devido à exponencial) e predomina.

Quando um elétron (carga  $-e$ ) é excitado da banda de valência para a de condução, ele deixa na banda de valência uma *lacuna* ("buraco") de carga  $+e$ . Ao aplicarmos um campo elétrico, as lacunas também se deslocam, em sentido oposto ao dos elétrons, contribuindo para a corrente.

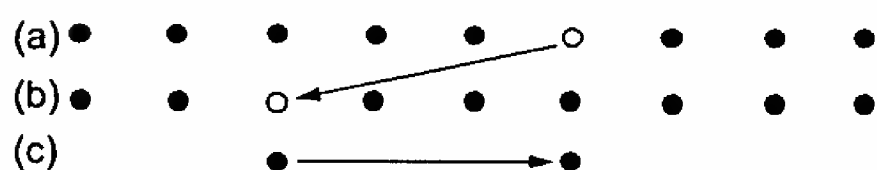


Figura 6.15 Contribuição das lacunas na condução

A fig. 6.15 explica como isto ocorre. Quando uma lacuna (a) se move para um sítio à esquerda (b), o efeito é o mesmo que se o elétron que estava nessa posição se tivesse deslocado para a direita (c), ocupando o lugar da lacuna. Assim, tanto elétrons como lacunas são portadores de corrente.

Na prática, têm grande importância os *semicondutores extrínsecos*, dopados com impurezas, por exemplo, germânio dopado com boro ou arsênio. O Ge é tetravalente (tem 4 elétrons de valência, que ligam cada Ge com seus 4 vizinhos na rede). Se introduzirmos numa rede de Ge uma impureza de As, que é pentavalente, o quinto elétron do As fica

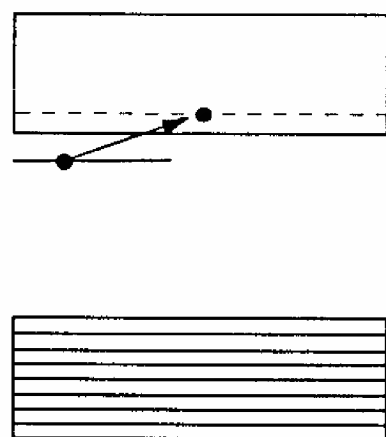


Figura 6.16 Impureza doadora

muito fracamente ligado, ocupando um nível de energia (fig. 6.16) situado pouco abaixo da banda de condução. Logo, uma energia de excitação térmica é suficiente para transferi-lo à banda de condução. Diz-se que a impureza é *doadora*, e o semicondutor dopado é de tipo *n* (portador de carga negativo).

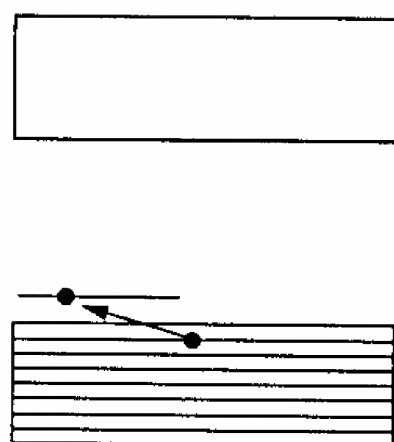


Figura 6.17 Impureza receptora

Já se a impureza é trivalente, como o B, fica faltando um elétron de valência no sítio por ela ocupado para efetuar a ligação com os sítios vizinhos. Uma pequena energia de excitação é suficiente para que um elétron da banda de valência do Ge se transfira para o B, deixando uma *lacuna* portadora de carga na banda de valência.

Aqui, a impureza é *receptora* (fig. 6.17), e o semicondutor é tipo *p* (portadores positivos). Junções *p-n* tem propriedades de *retificação*, e junções *p-n-p* ou *n-p-n* são a base dos *transistores*.

## 6.7 O efeito Joule

Para transportar uma carga  $dq$  através de uma diferença de potencial  $V$  (por exemplo, de um ao outro eletrodo da bateria), é preciso fornecer-lhe uma energia  $(dq) V$ . Logo, para manter uma corrente  $i = dq/dt$  durante um tempo  $dt$  através de  $V$ , é preciso fornecer uma energia

$$dW = (i dt) V$$

o que corresponde a uma *potência* (energia por unidade de tempo)

$$\boxed{\frac{dW}{dt} \equiv P = iV} \quad (6.7.1)$$

Para  $i = 1\text{A}$  e  $V = 1\text{V}$ , resulta  $P = 1\text{W}$  (watt).

Para uma corrente num trecho  $dl$  de um condutor de secção  $S$ , no qual a *queda* de potencial é  $dV$ , temos

$$dP = i \frac{dV}{dl} dl = i dl E = j S dl \cdot E = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dv$$

onde  $dv = S dl$  é o volume do elemento de condutor considerado, e  $\mathbf{j}$  é paralelo a  $\mathbf{E}$ . Logo, a *densidade de potência* (potência por unidade de volume) é

$$\boxed{\frac{dP}{dv} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}} \quad (6.7.2)$$

Para um condutor ôhmico, com  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , isto dá

$$\boxed{\frac{dP}{dv} = \sigma E^2 = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}} \quad (6.7.3)$$

Que acontece com essa potência? Como em outros processos onde há atrito, ela é *dissipada sob a forma de calor* (por exemplo, num chuveiro elétrico), podendo também produzir radiação térmica visível, como no aquecimento ao rubro da resistência de um aquecedor ou fogão elétrico.

Em termos da resistência  $R$  do condutor, fica

$$P = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (6.7.4)$$

Essa conversão de energia elétrica em calor é conhecida como *efeito Joule*: foi descoberta por Joule no decurso de suas experiências sobre o equivalente mecânico da caloria.

Em termos microscópicos, o calor corresponde à energia de vibração da rede, resultante da interação elétron-fônon. O "atrito" transfere energia da corrente para os fônons.

## 6.8 Força eletromotriz

A passagem de uma corrente  $i$  através de uma queda de voltagem (tensão)  $V$  gera, por unidade de tempo, uma energia  $iV$ . Essa energia elétrica pode ser convertida em outras formas de energia: mecânica, se a corrente for usada, por exemplo, para alimentar um motor de corrente contínua; térmica, se for usada para aquecimento, através do efeito Joule, etc.. Os "medidores de luz" das companhias de fornecimento de eletricidade, registram o trabalho fornecido, em kW.h.

De onde vem essa energia necessária para manter a corrente estacionária? À primeira vista, poderíamos pensar, com base na lei de Ohm,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  (onde  $\mathbf{j}$  é constante, de forma que  $\mathbf{E}$  não varia com o tempo), que a corrente pudesse ser mantida por um campo eletrostático ao longo do condutor.

Entretanto, é fácil verificar que isso não seria possível. Com efeito, vimos, como consequência da lei de conservação da carga (equação da continuidade) que, para uma corrente *estacionária*,  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , de forma que *as linhas de corrente são fechadas*. Mas pela lei de Ohm, isso implicaria que as linhas de força de  $\mathbf{E}$  também teriam de ser fechadas, o que é incompatível com um campo eletrostático, para o qual  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  ao longo de qualquer curva fechada  $C$ . Concluimos que *são necessárias forças não-eletrostáticas para manter uma corrente estacionária*.

Historicamente, a descoberta do primeiro mecanismo capaz de manter correntes estacionárias foi devida ao físico italiano Alessandro Volta, em 1800. Investigando efeitos de contração muscular de patas de rãs, sob a ação de descargas elétricas, que já haviam sido observados em 1780 por Galvani, Volta descobriu que, quando dois discos de metais diferentes, como cobre e zinco, estavam separados por um disco de pano ou papelão

umedecido, de preferência com água salgada, ou acidulada, aparecia uma diferença de potencial entre o cobre e o zinco. Era possível amplificar essa diferença empilhando vários "sanduíches" desse tipo. Essa "pilha voltaica" foi a primeira *bateria*, produzindo correntes estacionárias graças à conversão da energia oriunda de *reações químicas* produzidas nos *terminais* de cobre e zinco. A origem dessa energia química é explicável pela física quântica.

Podemos representar o efeito não-eletrostático que ocorre dentro da bateria, generalizando a lei de Ohm para

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}) \quad (6.8.1)$$

onde  $\mathbf{E}^{(e)}$  corresponde a um "campo elétrico equivalente" que só existe, neste exemplo, dentro da bateria, e é chamado de "campo impresso".  $\mathbf{E}^{(e)}$  representa a força, por unidade de carga, que é impressa sobre os portadores da corrente, e que tem *origem não-eletrostática*.

Um dos exemplos mais simples é uma solução diluída, digamos de HCl, em que há dissociação em íons  $\text{H}^+$  e  $\text{Cl}^-$ , e na qual existe um *gradiente de concentração*, ou seja, o número  $n$  de íons por unidade de volume (que tomamos igual para as duas espécies,  $n_+ = n_- = n$ ) varia com a posição. Por exemplo (fig. 6.18), a concentração é maior do lado esquerdo do que do lado direito da solução. Sabemos que, nesse caso,  $\text{grad } n$  está dirigido da direita para a esquerda (máximo acentuado).

Vai ocorrer então um processo *puramente mecânico* de difusão, facilmente compreensível em termos da teoria cinética: a agitação térmica leva mais íons de concentração maiores para menores do que em sentido inverso. Esse efeito tende a uniformizar a concentração, levando a uma densidade de *corrente de partículas* dada pela *lei da difusão*

$$\mathbf{g} = -D \text{ grad } n \quad (6.8.2)$$

onde  $\mathbf{g}$  é a densidade de corrente de *partículas* e  $D$  chama-se o *coeficiente de difusão*. O sentido de  $\mathbf{g}$ , no exemplo acima, seria da esquerda para a direita – inverso ao do  $\text{grad } n$ .

Entretanto, os íons  $\text{H}^+$  (massa atômica 1) são bem mais leves que os  $\text{Cl}^-$  (massa atômica ~35,5), de modo que seu coeficiente de difusão  $D_+$  é  $\gg D_-$ , o coeficiente de difusão dos íons  $\text{Cl}^-$ . O processo de difusão tende portanto a acumular carga + à direita e – à esquerda, criando um *campo elétrico*  $\mathbf{E}$ , orientado da direita para a esquerda. Esse campo também atua sobre os íons, que adquirem, sob a ação dele e do *atrito interno* (viscosidade) movendo-se através do fluido, velocidades terminais  $\mathbf{v}$  constantes, proporcionais à força elétrica  $\mathbf{F}$  do campo. A constante de proporcionalidade  $\mu$  chama-se *mobilidade* do íon:

$$\mathbf{v} \equiv \mu \mathbf{F} \quad (6.8.3)$$

A corrente elétrica total resultante da ação combinada de  $\text{grad } n$  e de  $\mathbf{E}$  será, com  $\mathbf{F}_+ = e \mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}_- = -e \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{j} = -e(D_+ - D_-) \text{grad } n + ne(\mu_+ \mathbf{F}_+ - \mu_- \mathbf{F}_-) \quad (6.8.4)$$

ou seja, com boa aproximação, considerando que a *mobilidade*  $\mu_+$  também é  $\gg \mu_-$ , e desprezando os termos pequenos,

$$\mathbf{j} \approx -eD_+ \text{grad } n + ne^2\mu_+ \mathbf{E} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}) \quad (6.8.5)$$

onde  $ne^2\mu_+ \mathbf{E}$  representa a corrente *ôhmica*  $nev$  no eletrólito e

$$\mathbf{E}^{(e)} = -\frac{D_+}{e\mu_+} \frac{\text{grad } n}{n} = -\frac{D_+}{e\mu_+} \text{grad}(\log n) \quad (6.8.6)$$

é o *campo impresso*, de origem puramente cinética.

Será atingido equilíbrio quando o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , devido à acumulação de íons mais à direita, compensar exatamente o campo impresso devido ao gradiente de concentração:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{E}^{(e)} \quad (6.8.7)$$

Nessa situação ("circuito aberto") teremos  $\mathbf{j} = 0$ .

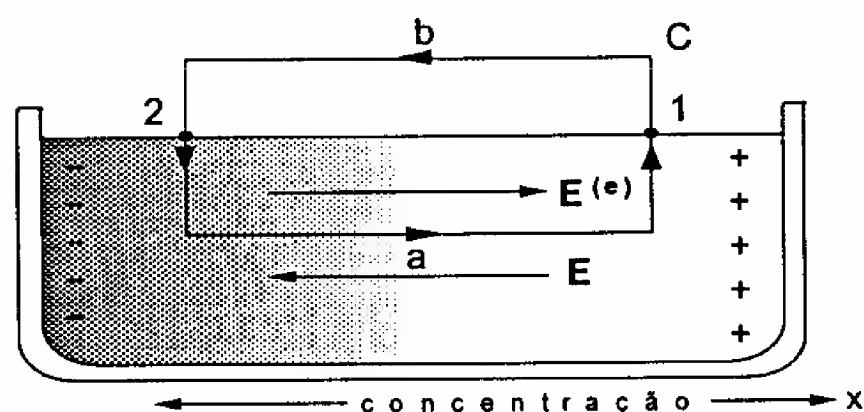


Figura 6.18 Caminho de integração C

Consideremos, em equilíbrio, uma curva fechada  $C$  como a da fig. 6.18, e a integral sobre  $C$

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}) \cdot d\mathbf{l} \quad (6.8.8)$$

O campo  $\mathbf{E}$  é, *no equilíbrio*, um campo *eletrostático*, produzido pela distribuição de cargas  $+$  e  $-$ , de forma que  $\mathbf{E} \neq 0$  dentro e fora da solução, e

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (6.8.9)$$

Entretanto,  $\mathbf{E}^{(e)}$  só é  $\neq 0$  dentro da solução, e vem

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}^{(e)} \cdot d\mathbf{l} = \int_{2(a)}^1 \mathbf{E}^{(e)} \cdot d\mathbf{l} \quad (\neq 0) \quad (6.8.10)$$

que se chama *força eletromotriz*\* associada à curva fechada  $C$ .

Como  $E^{(e)} = -E$  dentro da solução, temos também

$$\boxed{\mathcal{E} = - \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_1 - V_2} \quad (6.8.11)$$

ou seja,  $\mathcal{E}$  é igual à *diferença de potencial em circuito aberto* entre os pontos 1 e 2 (numa bateria de 1,5V, tem-se  $\mathcal{E} = 1,5V$ ).

Podemos calcular  $\mathcal{E}$  explicitamente no exemplo dado: tomando um eixo  $Ox$  da esquerda para a direita, e supondo  $n = n(x)$ ,

$$\mathcal{E} = - \frac{D_+}{e\mu_+} \int_2^1 \frac{1}{n} \underbrace{\text{grad } n \cdot d\mathbf{l}}_{\frac{dn}{dx} dx} = - \frac{D_+}{e\mu_+} \int_2^1 \frac{d}{dx} \ln n dx$$

$\therefore$

$$\boxed{\mathcal{E} = - \frac{D_+}{e\mu_+} \ln \left[ \frac{n(x_1)}{n(x_2)} \right]} \quad (6.8.12)$$

Se materializarmos o trecho *externo à solução* do circuito  $C$  por um fio condutor de condutividade  $\sigma$ , passará por ele uma corrente  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \neq 0$ , e teremos agora uma intensidade de corrente  $i$  dada por\*\*

$$\boxed{\mathcal{E} = V_1 - V_2 = V = Ri} \quad (6.8.13)$$

onde  $R$  é a resistência do fio condutor.

Na realidade, não podemos desprezar a dissipação dentro da própria bateria (solução), que corresponde a uma *resistência interna* equivalente  $r$ . Assim, o *diagrama de circuito* que representa essa situação é o da fig. 6.19, e temos

---

\* Este é o nome tradicional, mas note que  $\mathcal{E}$  não é uma força: tem as dimensões de uma voltagem.

\*\* Não estamos levando em conta aqui os efeitos do contato entre o fio metálico e a solução (diferença de potencial de contato).



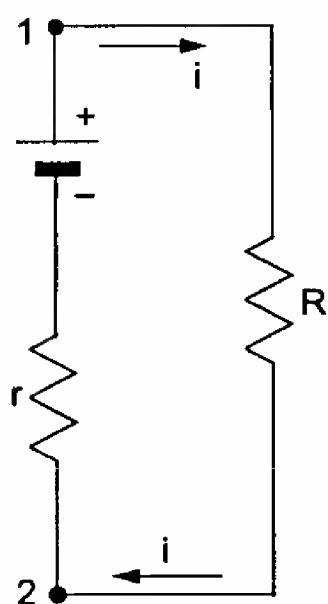


Figura 6.19 Circuito equivalente de uma bateria

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (6.8.14)$$

de forma que a diferença de potencial entre os pontos 1 e 2 *em circuito fechado* é

$$V = R i = \frac{R}{R + r} \mathcal{E} < \mathcal{E} \quad (6.8.15)$$

devido à resistência interna da bateria.

Note que as linhas de corrente de  $\mathbf{j}$  são fechadas, como tem de ser para uma corrente estacionária. *Fora da bateria, a corrente tem o sentido da queda de potencial* (de  $V_1$  para  $V_2 < V_1$ ), mas *dentro* dela é o inverso: a corrente vai de  $V_2$  para  $V_1$ , e as cargas *ganham* energia, devido ao *campo impresso* (gradiente de concentração).

Podemos comparar a situação com o escoamento de água dentro de uma canalização fechada (circuito). O fluxo de água é mantido por bombeamento: a bateria desempenha aqui um papel análogo ao da bomba.

Existem muitos outros tipos de fem ( $\equiv$  força eletromotriz). Os efeitos que produzem o campo impresso e a fem associada podem provir de reações químicas nos eletrodos, como numa pilha de lanterna ou bateria de automóvel, da conversão de energia térmica em elétrica, como num par termoelétrico (junções entre dois fios de metais diferentes mantidas a temperaturas diferentes), de energia da radiação, como numa célula solar, etc.

## PROBLEMAS

1. Uma válvula diodo da era pré-transistor contém um par de placas planas paralelas de espaçamento  $d$ , no vácuo. Estabelece-se entre elas uma diferença de potencial  $V$ . Um feixe de elétrons com área de secção transversal  $A$  e de velocidade inicial  $v_0$  é emitido a partir de uma das placas (cátodo) e acelerado até a outra (ânodo), produzindo uma corrente estacionária de intensidade  $i$ . (a) Calcule a velocidade  $v(x)$  de um elétron à distância  $x$  do cátodo. (b) Calcule a densidade  $n(x)$  de elétrons no feixe como função de  $x$ . Suponha que  $i$  é suficientemente fraco para que o campo gerado pelos elétrons seja desprezível em confronto com o campo acelerador.

2. Um cilindro metálico carregado, de 5 cm de raio, desloca-se ao longo do seu eixo com uma velocidade constante, de 10 cm/s. O campo elétrico radial produzido pelas cargas, na superfície lateral do cilindro, é de 500 V/cm. Qual é a intensidade da corrente devida ao movimento do cilindro?

3. A lampadinha de uma lanterna alimentada por uma bateria de 9 V tem um filamento de tungstênio, cuja resistência à temperatura ambiente (20°C) é de  $4,5\Omega$ . Quando acesa, dissipa uma potência de 1,5 W. Calcule a temperatura do filamento, sabendo que o coeficiente de temperatura da resistividade do tungstênio é  $\alpha = 4,5 \times 10^{-3}$ .

4. O campo elétrico médio na atmosfera, perto da superfície terrestre, é de 100 V/m, dirigido para a Terra. A corrente média de íons que atinge a totalidade da superfície da Terra é de 1800 A. Supondo que a distribuição da corrente é isotrópica, calcule a condutividade do ar na vizinhança da superfície da Terra.

5. As placas de um capacitor plano de capacitância  $C$ , preenchido com um dielétrico de constante dielétrica  $\kappa$ , estão ligadas aos terminais de uma bateria, que mantém entre elas uma diferença de potencial  $V$ . O dielétrico tem uma condutividade  $\sigma$ , o que produz uma corrente de perda. (a) Calcule a resistência  $R$  do dielétrico como função de  $C$ . (b) Mostre que o resultado permanece válido para um capacitor cilíndrico ou esférico. (c) Você consegue demonstrar que vale em geral?

6. A condutividade de um cilindro de comprimento  $l$  e área de secção transversal  $S$  cresce linearmente com a distância, assumindo o valor  $\sigma_0$  numa extremidade e  $\sigma_1$  na outra. Calcule a resistência total do cilindro.

7. Uma bateria de fem  $\mathcal{E}$  e resistência interna  $r$  fornece corrente a um aparelho de resistência  $R$ . (a) Para que valor de  $R$  a potência fornecida é máxima? (b) Para esse valor de  $R$ , qual é a relação entre a potência fornecida e aquela dissipada na própria bateria?

8. Quando uma bateria de fem igual a 1,5 V fornece uma corrente de 1 A a uma resistência externa  $R$ , a tensão medida entre seus terminais cai para 1,4 V. (a) Qual é o valor de  $R$ ? (b) Qual é a resistência interna da bateria? (c) Qual é a taxa de conversão de energia química em energia elétrica na bateria, por unidade de tempo, nessas condições? (d) Qual é a potência convertida em calor na resistência externa? (e) Qual é a perda de potência na bateria?

9. Um aquecedor elétrico de imersão ligado a uma fonte de corrente contínua de 110 V demora 6 min para levar até a fervura 0,5 l de água, partindo da temperatura ambiente de 20°C. A intensidade da corrente é de 5 A. Qual é a eficiência do aquecedor? (A eficiência é a porcentagem da energia gerada que é utilizada no aquecimento da água).

10. Considere o exemplo visto na Seção 6.8 de uma solução iônica de HCl com um gradiente de concentração na direção  $x$ , em circuito aberto, em equilíbrio térmico à temperatura  $T$ . (a) Usando os resultados obtidos, calcule a razão  $n(x_2)/n(x_1)$  das concentrações de íons nos terminais  $x_2$  e  $x_1$ , entre os quais existe uma fem  $\mathcal{E}$ . (b) Identificando o resultado com o fator de Boltzmann  $\exp[-E/(kT)]$ , demonstre a *relação de Einstein*  $D_+/\mu_+ = kT$ . (c) Para uma razão de concentrações  $n(x_1)/n(x_2) = 10$ , à temperatura ambiente, calcule a fem resultante  $\mathcal{E}$ .

# 7

## CAMPO MAGNÉTICO

Já na Grécia antiga se conheciam as propriedades de um minério de ferro encontrado na região da Magnésia, a *magnetita* ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ): um pedaço de magnetita é um *ímã permanente*, que atrai pequenos fragmentos de ferro.

Em 1100 A.C., os chineses já haviam descoberto que uma agulha de magnetita capaz de se orientar livremente num plano horizontal alinha-se aproximadamente na direção norte-sul, e usavam este aparelho, a bússola, na navegação.

Em 1600, William Gilbert publicou um importante tratado sobre o magnetismo, onde observa, pela primeira vez, que a própria Terra atua como um grande ímã.

Um ímã permanente (em particular, a agulha magnética de uma bússola) tem um *pólo norte* (N) e um *pólo sul* (S), e é fácil verificar, com dois ímãs, que seus pólos de mesmo nome (N e N ou S e S) se repelem, e que seus pólos de nomes contrários (N e S) se atraem.

Poderíamos então pensar em descrever o magnetismo produzido por ímãs permanentes de forma análoga à eletrostática, introduzindo cargas magnéticas N e S por analogia com cargas elétricas + e –.

Entretanto, a experiência mostra que não é possível separar um do outro os pólos N e S de um ímã. Se o partirmos em dois, cada um deles continuará tendo pólos N e S.

Em anos recentes, fez-se um grande esforço experimental para verificar se existem partículas com "carga magnética", que seriam pólos N ou S isolados (*monopolos magnéticos*). Nenhum jamais foi detectado.

É portanto um fato experimental básico no estudo do magnetismo que *não existem cargas magnéticas* (pólos magnéticos isolados).

Podemos pensar numa barra ou agulha imantada como análoga a um *dipolo* - magnético em lugar de elétrico. A barra magnética seria análoga a um *dielétrico polarizado*,

e os pólos norte e sul que aparecem em suas faces seriam análogos às cargas de polarização ligadas sobre as extremidades de uma barra dielétrica polarizada (note que, também neste caso, se partíssemos uma barra em duas, cargas superficiais de polarização apareceriam nas novas faces).

Sabemos que a posição de equilíbrio de um dipolo num campo elétrico uniforme corresponde ao dipolo *alinhado* com o campo. Por analogia, podemos mapear a direção e o sentido de um *campo magnético* num dado ponto como a direção de equilíbrio e o sentido  $S \rightarrow N$  de uma pequena bússola colocada neste ponto.

Quando salpicamos limalha de ferro sobre um ímã, cada pequeno fragmento de ferro se *magnetiza* por indução e funciona como uma minúscula agulha imantada (bússola), indicando a direção do campo, de modo que materializamos assim as *linhas de força magnéticas*.

## 7.1 Definição de $\mathbf{B}$

Para definir  $\mathbf{E}$ , consideramos a força  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  que atua sobre uma carga de prova puntiforme  $q$  colocada num campo elétrico. Já o campo magnético exerce forças sobre *cargas em movimento*. Verifica-se experimentalmente que a força é proporcional à carga e à magnitude da velocidade da partícula. Entretanto, a direção da força é *perpendicular* às direções da velocidade  $\mathbf{v}$  e do campo magnético. A força  $\mathbf{F}$  é dada por

$$\mathbf{F} = k q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.1.1)$$

onde  $k$  é uma constante positiva, que depende da escolha do sistema de unidades, e  $\mathbf{v}$  é a velocidade da partícula de carga  $q$  em relação a um referencial *inercial*.

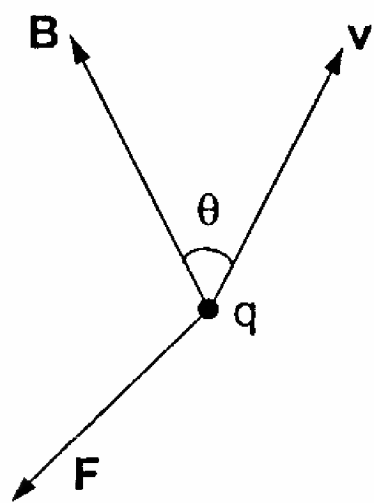


Figura 7.1 Força magnética sobre uma carga

Logo  $|\mathbf{F}| \propto \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{v}$ ;  $\mathbf{F}$  é perpendicular a  $\mathbf{v}$  e a  $\mathbf{B}$ , e anula-se se  $\mathbf{v}$  é paralelo a  $\mathbf{B}$ . No SI, toma-se  $k = 1$ . Logo,

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7.1.2)$$

o que define a *magnitude* de  $\mathbf{B}$ . Em particular, se  $\mathbf{v}$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$  e se  $|\mathbf{v}| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $q = 1 \text{ C}$  e  $|\mathbf{F}| = 1 \text{ N}$ , obtemos a *unidade* de  $|\mathbf{B}|$  nesse sistema, que se chama  $1\text{T}$  (*Tesla*):

$$1\text{T} = 1 \frac{\text{N} / \text{C}}{\text{m} / \text{s}} \quad (7.1.3)$$

1T corresponde a um campo magnético muito intenso. É também muito usada a unidade de  $|\mathbf{B}|$  no sistema CGS, que é o *Gauss* (G):

$$1\text{G} = 10^{-4}\text{T} \quad (7.1.4)$$

O campo magnético da Terra é  $\sim 0,6\text{G} = 6 \times 10^{-5}\text{T}$ . Campos magnéticos muito intensos produzidos em laboratório, durante tempos muito curtos, atingem algumas centenas de T.

Consideramos acima uma situação em que só existe campo magnético atuando sobre a carga  $q$ . Se existir, além disso, um campo elétrico  $\mathbf{E}$ , a força resultante é:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.1.5)$$

que se chama *força de Lorentz*.

$\mathbf{E}$ , como  $\mathbf{F}$ , é um vetor *polar*. Como  $\mathbf{v}$  também é um vetor polar, para que o produto vetorial  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  seja polar é preciso que  $\mathbf{B}$  seja um vetor *axial*, ou seja, o *sentido* de  $\mathbf{B}$  está associado a uma *convenção*. Da forma como o definimos, é a convenção  $\text{S} \rightarrow \text{N}$  da agulha magnética de prova.

Se a carga  $q$  sofre um deslocamento  $d\mathbf{l}$  durante um intervalo de tempo infinitésimo  $dt$ , temos  $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$ , e o trabalho realizado pela força de Lorentz é

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

pois  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ .

Logo,

$$\frac{dW}{dt} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (7.1.6)$$

é a potência [trabalho/(unidade de tempo)] associada à força de Lorentz, que se deve exclusivamente ao campo elétrico. *O campo magnético não realiza trabalho*, porque a força magnética é sempre perpendicular à velocidade da partícula.

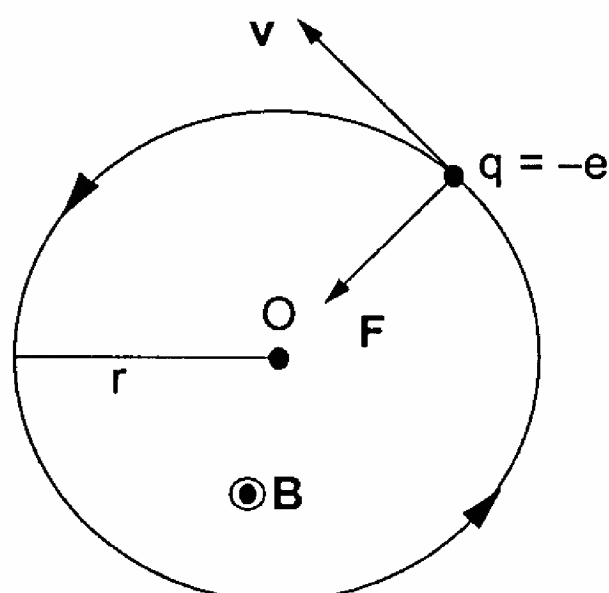
Assim, a energia cinética de uma partícula carregada num campo puramente magnético permanece constante.

#### *Exemplo: Movimento num campo $\mathbf{B}$ uniforme*

Tomando o eixo  $Oz \parallel \mathbf{B}$ , temos  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$ . Se a velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  da partícula tem uma componente  $v_{0z} \neq 0$ , esta componente não se altera, porque

$F_z = 0$ . Logo, basta considerar a projeção do movimento sobre o plano  $(xy)$  perpendicular a  $\mathbf{B}$ .

Como a energia cinética não se altera, a *magnitude* da velocidade no plano  $(xy)$  é constante, e a força (portanto também a aceleração) é sempre perpendicular à velocidade, o que é uma característica da aceleração centrípeta no movimento *circular* uniforme (fig. 7.2). Se  $v \equiv |\mathbf{v}|$  é a velocidade inicial no plano  $(xy)$ , temos



$$F = q v B = m \frac{v^2}{r}$$

o que dá para o raio  $r$  da órbita circular:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (7.1.7)$$

e

Figura 7.2 Órbita circular num campo  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}$  aponta para cima).

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} B \quad (7.1.8)$$

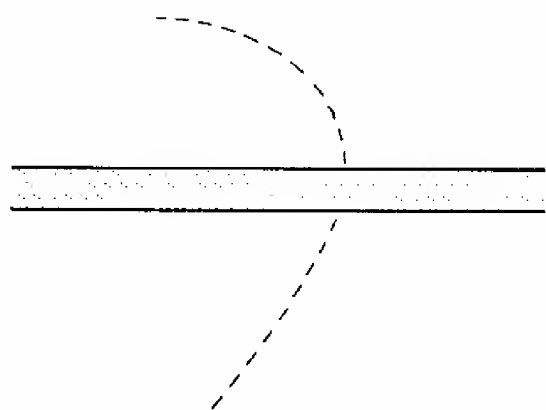
é a frequência angular correspondente ("frequência de cíclotron"), que só depende de  $(q/m)$  e  $B$ . Essa frequência angular é independente da velocidade da partícula: o raio  $r$  cresce com  $v$ , mas o tempo para uma volta completa independe de  $v$  (cf. *Física Básica* 1, Seq. 5.4).

Se  $v_{0z} \neq 0$ , é preciso superpor ao movimento circular em torno de  $\mathbf{B}$  um movimento uniforme na direção de  $\mathbf{B}$ , de forma que as partículas carregadas descrevem *hélices*, espiralando em torno das linhas de  $\mathbf{B}$ .

Trajcetórias circulares de partículas carregadas em campos  $\mathbf{B}$  uniformes tornam-se visíveis em instrumentos empregados na física de partículas. Historicamente, um dos mais importantes foi a *câmara de Wilson*, um recipiente contendo vapor de água quase saturado, em que se faz uma expansão adiabática súbita, resfriando-o, o que torna o vapor supersaturado. Gotinhas de água tendem então a condensar-se em torno dos íons existentes na câmara, produzidos pela passagem da partícula carregada que se quer detectar, cuja trajetória é assim materializada e pode ser fotografada.

Com um campo  $\mathbf{B}$  perpendicular ao plano da trajetória na câmara, ela é um círculo ou arco de círculo, cujo raio  $mv/(qB)$  dá a informação sobre a magnitude do momento  $mv$  da partícula; se conhecermos o sentido de percurso, também dá o sinal da

carga (na fig. 7.2, o sentido de percurso anti-horário é para uma carga negativa; para uma carga positiva, o sentido seria horário).



**Figura 7.3** Trajetória de um pósitron numa câmara de Wilson, com  $\mathbf{B}$  para dentro do plano. A placa é atravessada de baixo para cima.

Um exemplo famoso foi a foto obtida em 1932 por Carl Anderson, em que a partícula atravessava uma placa de chumbo, com  $\mathbf{B}$  dirigido para dentro do plano da foto, cujo aspecto é esquematizado na fig. 7.3. A trajetória tinha características típicas de um elétron. A diminuição do raio de curvatura  $r$  de baixo para cima, associada com uma perda de momento ao atravessar a placa, mostra que o senti-

do é anti-horário. Isso permitiu concluir que a carga era *positiva* e levou à descoberta do *pósitron*.

Aplicações importantes do movimento de partículas carregadas, em campos elétricos e magnéticos, já foram vistas no curso de Mecânica (*Física Básica 1*, Seç. 5.4): determinação de  $e/m_e$  nas experiências de J. J. Thomson, filtro de velocidades, espectrômetro de massa, ciclotron. Exemplos encontram-se nos problemas do final deste capítulo.

### O fluxo de $\mathbf{B}$

O fluxo de  $\mathbf{B}$  através de uma superfície  $S$ , com versor da normal  $\hat{\mathbf{n}}$ , é definido por

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (7.1.9)$$

Como não existem cargas magnéticas (monópolos), o análogo magnético da lei de Gauss é

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (7.1.10)$$

para *qualquer* superfície fechada. Se  $V$  é o volume contido dentro de  $S$ , isto implica, pelo teorema da divergência,

$$\int_V \text{div } \mathbf{B} \, dV = 0 \quad (7.1.11)$$

o que só é possível, sendo  $V$  qualquer, se

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (7.1.12)$$

Essa é uma das equações de Maxwell, representando uma propriedade fundamental do campo  $\mathbf{B}$ . Dela decorre, como sabemos, que *as linhas de força magnéticas são sempre*



*fechadas* (não há fontes nem sorvedouros), ou então têm de iniciar-se e terminar no infinito (são "fechadas no infinito").

A unidade de fluxo magnético é 1 Wb (Weber). Temos [cf. (7.1.3)]

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \quad (7.1.13)$$

## 7.2 Força magnética sobre uma corrente

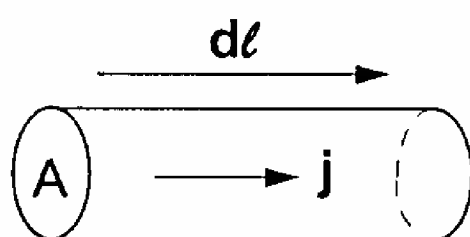


Figura 7.4 Trecho condutor com corrente  $j$

Consideremos um trecho infinitésimo  $dl$  de um fio condutor de secção transversal  $A$  (fig. 7.4), percorrido por uma corrente elétrica de densidade  $j$ . Supondo, para fixar idéias, que se trate de um fio condutor metálico, onde os portadores de carga são elétrons livres, sabemos que

$$j = -ne\langle v \rangle \quad (7.2.1)$$

onde  $n$  é o número de elétrons livres por unidade de volume e  $\langle v \rangle$  é a velocidade média dos elétrons associada à corrente.

Num campo magnético  $B$ , a força média sobre cada elétron livre será então  $-e\langle v \rangle \times B$ , e a *densidade de força*  $f$  (força por unidade de volume) exercida pelo campo magnético sobre a corrente será

$$f = -n e \langle v \rangle \times B \quad \left\{ \quad f = j \times B \right. \quad (7.2.2)$$

A força total  $dF$  exercida sobre os elétrons livres contidos no volume  $A dl$  do condutor será então

$$dF = f A dl = j A dl \times B$$

ou seja, se  $i$  é a intensidade da corrente,

$$dF = i dl \times B \quad (7.2.3)$$

onde  $idl$  chama-se um "*elemento de corrente*" (veja Seq. 8.3). Admitindo que essa força se transmite ao fio (veremos na Seq. 7.3 o mecanismo pelo qual isto acontece), temos que  $dF$  é a força exercida pelo campo magnético sobre o trecho  $dl$  do fio condutor.

A força resultante sobre o circuito fechado  $C$  onde passa a corrente (uma corrente estacionária sempre flui num circuito fechado, como vimos na Seq. 6.2) é

$$\mathbf{F} = i \oint_C \mathbf{dl} \times \mathbf{B}$$

(7.2.4)

Em particular, se o campo é *uniforme*, temos

$$\mathbf{F} = i \left( \oint_C \mathbf{dl} \right) \times \mathbf{B} = 0$$

pois  $\oint_C \mathbf{dl} = 0$ , pela regra da adição de vetores. Logo, a *força resultante* sobre qualquer circuito percorrido por uma corrente estacionária é nula. Isso não quer dizer, porém, que o *torque* resultante seja nulo.

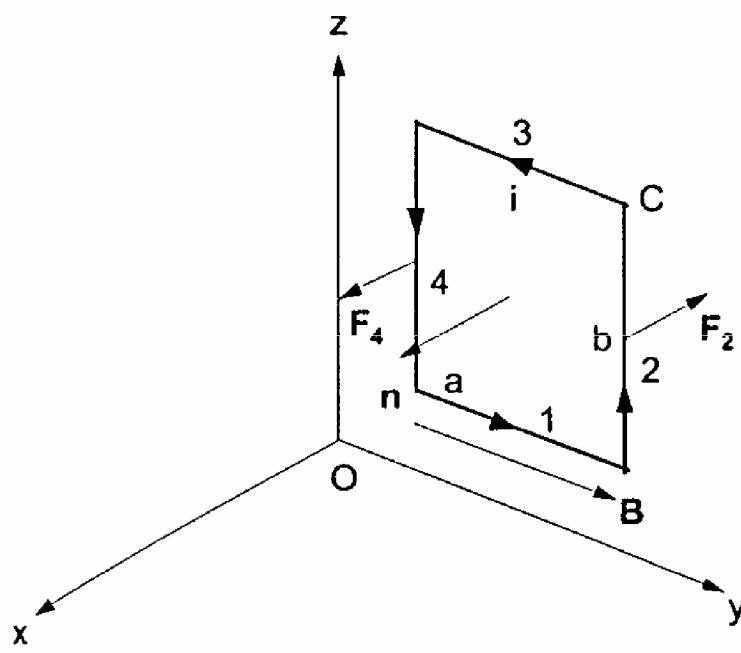


Figura 7.5 Espira retangular num campo  $\mathbf{B}$  uniforme.

Com efeito, consideremos um circuito retangular de lados  $a$  e  $b$  percorrido por uma corrente estacionária  $i$  e situado num campo uniforme, que supomos primeiro paralelo ao lado  $a$ . (fig. 7.5).

Como os lados 1 e 3 são paralelos a  $\mathbf{B}$ , não contribuem para as forças. No sistema de coordenadas da fig. 7.5, a força  $\mathbf{F}_2$  sobre o lado 2 é  $i b \hat{\mathbf{z}} \times (B \hat{\mathbf{y}}) = -i B b \hat{\mathbf{x}}$ , igual e contrária à força  $\mathbf{F}_4$  sobre o lado 4, o que corresponde a um *binário* de torque

$$\boldsymbol{\tau} = (i B b) a \hat{\mathbf{z}} = i S B \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

(7.2.5)

em que  $S = ab$  é a área do circuito  $C$  e definimos

$$\mathbf{m} = i S \hat{\mathbf{x}} = i S \hat{\mathbf{n}} \equiv i S$$

(7.2.6)

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor da normal orientada ao plano do circuito (*orientação*: visto da extremidade de  $\hat{\mathbf{n}}$ , o circuito é percorrido em sentido anti-horário).

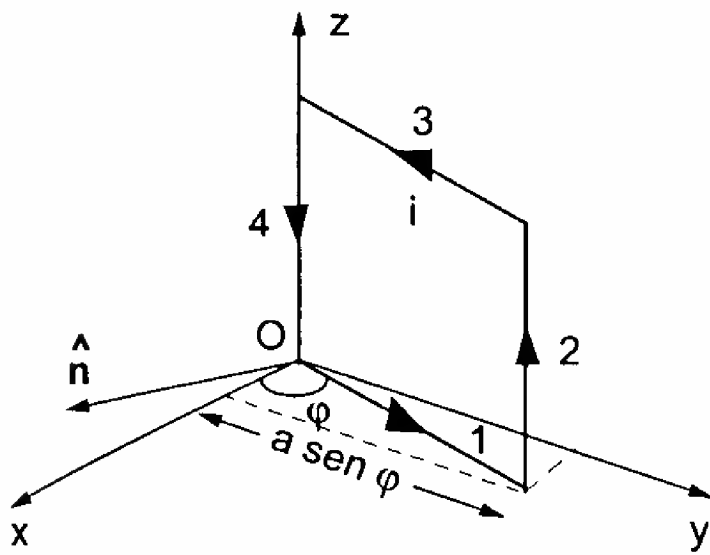


Figura 7.6 Outra orientação da espira

Se considerarmos outra orientação do plano de  $C$ , como na fig. 7.6, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= i(a \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + a \sin \phi \hat{\mathbf{y}}) \times B \hat{\mathbf{y}} = \\ &= i a B \cos \phi \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

que, com  $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_1$ , não produz torque. Por outro lado,  $\mathbf{F}_2$  e  $\mathbf{F}_4$  não se alteram, mas o braço do binário é agora  $a \sin \phi$ , de modo que, com  $\hat{\mathbf{n}} = \sin \phi \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$ , vem

$$\begin{aligned}\tau &= (i B b) a \sin\phi \hat{\mathbf{z}} = i S B \sin\phi \hat{\mathbf{z}} = \\ &= i S (\sin\phi \hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \hat{\mathbf{y}}) \times (B \hat{\mathbf{y}}) = i S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

Assim, o resultado (7.2.5) permanece válido.

A expressão do torque é inteiramente análoga à da (4.4.17) para um dipolo elétrico  $\mathbf{p}$  num campo elétrico uniforme  $\mathbf{E}$  ( $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ ). Dizemos por isso que o circuito se comporta como tendo um *momento de dipolo magnético*.

$$\mathbf{m} = i \mathbf{S}$$

(7.2.7)

onde  $\mathbf{S} = S \hat{\mathbf{n}}$  é a sua *área orientada*.

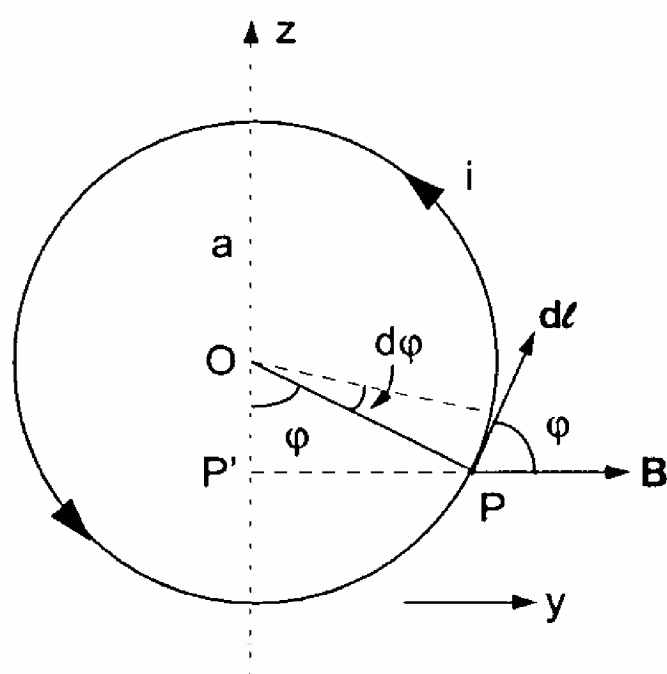


Figura 7.7 Espira circular num campo uniforme

Embora tenhamos obtido esse resultado para um circuito retangular, ele permanece válido para circuitos de forma qualquer. Se considerarmos, por exemplo, uma espira circular de raio  $a$ , com  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{y}}$ , teremos (fig. 7.7)

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = (a d\phi) B \sin\phi (-\hat{\mathbf{x}})$$

ou seja,

$$d\mathbf{F} = -i a \sin\phi \cdot B d\phi \hat{\mathbf{x}}$$

cujo torque em relação ao eixo  $z$  é

$$d\tau = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = a \sin\phi \hat{\mathbf{y}} \times d\mathbf{F} = i a^2 B \sin^2\phi \hat{\mathbf{z}} d\phi$$

e o torque total é

$$\tau = \int d\tau = i a^2 B \left( \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi \right) \hat{\mathbf{z}} = i a^2 \frac{B}{2} \left[ \phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi) \right]_0^{2\pi}$$

Finalmente,

$$\tau = i(\pi a^2) B \hat{\mathbf{z}} = i S B \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

confirmando que as (7.2.5) e (7.2.6) permanecem válidas.

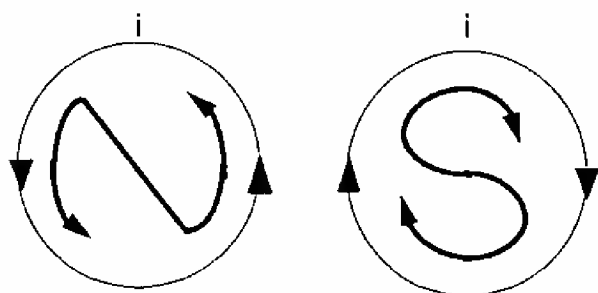


Figura 7.8 Face norte e face sul de uma espira com corrente

A posição de equilíbrio corresponde a  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$ , ou seja,  $\hat{\mathbf{n}} \parallel \mathbf{B}$ : o circuito tende a orientar-se *perpendicularmente* ao campo magnético. A fig. 7.8 dá uma regra mnemônica para lembrar qual é a "face norte" e qual a "face sul" do dipolo magnético equivalente ao circuito ( $\mathbf{m}$  aponta do sul para o norte).

O torque sobre uma espira ou bobina percorrida por uma corrente e situada num campo magnético é a base de aparelhos de medida da intensidade da corrente, como galvanômetros e amperímetros (pois o torque é proporcional à intensidade  $i$ ), bem como dos motores de corrente contínua.

### 7.3 O efeito Hall

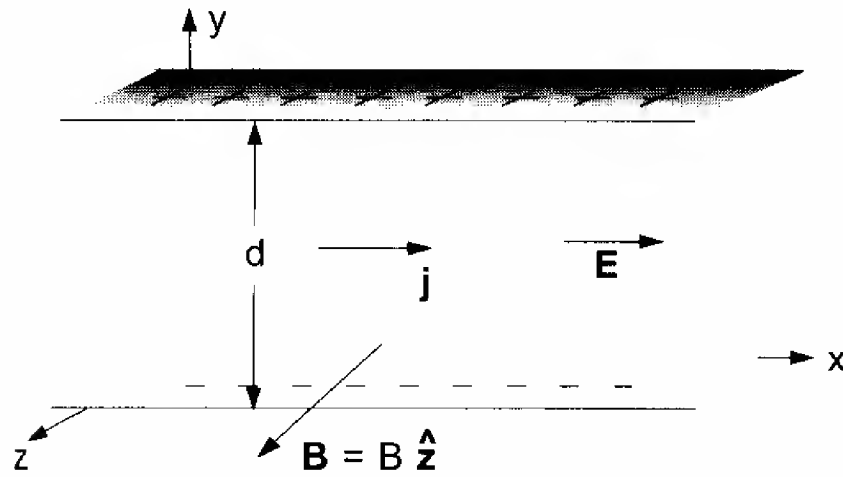


Figura 7.9 Barra com corrente num campo  $\mathbf{B}$

Consideremos uma barra condutora por onde passa uma corrente de densidade  $\mathbf{j}$  (tomamos  $Ox \parallel \mathbf{j}$ ), situada num campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$  (fig. 7.9). Supondo a corrente devida a um único tipo de portadores, de carga  $q$ , temos

$$\mathbf{j} = n q \langle \mathbf{v} \rangle = n q \langle v \rangle \hat{\mathbf{x}} \quad (7.3.1)$$

onde  $n$  é a densidade de portadores.

Na presença do campo  $\mathbf{B}$ , atua sobre cada portador a força média

$$q \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} = q \langle v \rangle B \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -q \langle v \rangle B \hat{\mathbf{y}}$$

dirigida para *baixo*, pois tem o sentido de  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  (se os portadores são elétrons,  $q = -e < 0$  e  $\langle v \rangle < 0$ , pois eles se movem para a esquerda, se  $\mathbf{j}$  é para a direita). Logo, acumula-se\* um excesso de cargas  $q$  embaixo, deixando um excesso de cargas de sinal oposto em cima (fig. 7.9).

Para fixar as idéias, suponhamos que os portadores são elétrons. As cargas negativas continuam se acumulando embaixo, deixando carga positiva oposta em cima, até que o campo elétrico vertical  $\mathbf{E}^{(e)}$  assim gerado, dirigido de cima para baixo, compense exatamente o efeito do campo magnético sobre cada portador de carga:

$$q |\mathbf{E}^{(e)}| = q |\langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}|$$

Se  $d$  é a largura da barra, a *força eletromotriz* transversal à corrente assim gerada é

$$\mathcal{E} = |\mathbf{E}^{(e)}| d = |\langle \mathbf{v} \rangle| B d = \frac{j}{nq} B d$$

\* A pressão devida ao impacto das cargas sobre as paredes, transmitida ao condutor, é o mecanismo microscópico de geração da força (7.2.3).

Esse efeito foi descoberto por E. H. Hall em 1879, e a fem chama-se *fem Hall*. Note que a parte de cima da barra na configuração acima estará a potencial mais *alto* que a de baixo se os portadores têm carga negativa, como elétrons, mas estará a potencial mais *baixo* se tiverem carga positiva. Logo, o efeito Hall pode ser usado para determinar o sinal dos portadores de carga<sup>\*</sup>. Também pode ser usado para determinar o *coeficiente Hall*  $\frac{1}{nq}$ .

A fem Hall é extremamente pequena. Por exemplo, para uma fita de cobre de largura  $d = 1$  cm e espessura de 0,1 mm, transportando uma corrente  $i = 10$  A num campo magnético  $B = 1$  T, obtemos (à temperatura ambiente)

$$\left. \begin{aligned} j &= \frac{i}{A} = \frac{10}{10^{-2} \times 10^{-4}} = 10^7 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \\ n &\approx 8,5 \times 10^{28} \text{ elétrons / m}^3 \\ |q| &= e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{10^7}{8,5 \times 1,6 \times 10^9} \times 10^{-2} \text{ V} \\ &\approx 7,4 \text{ } \mu\text{V} \end{aligned}$$

---

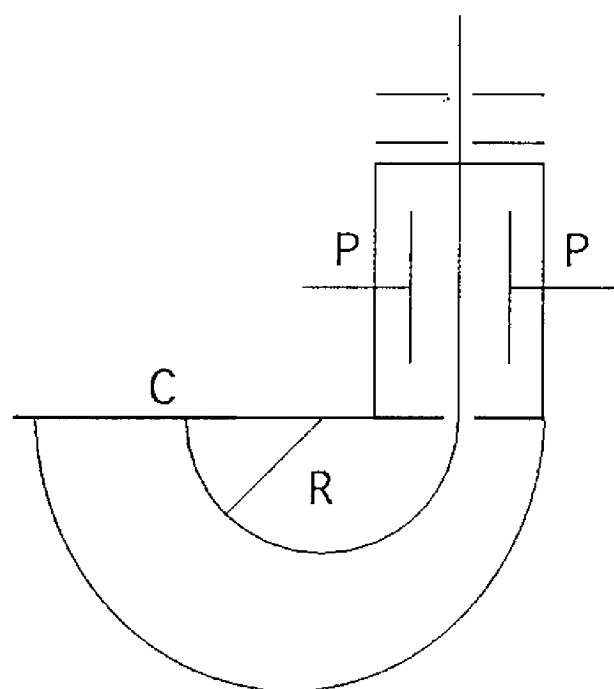
\* Verifica-se assim que, em alguns metais, os portadores de corrente são *buracos* (carga  $+e$ ) em lugar de elétrons (carga  $-e$ ).

## PROBLEMAS

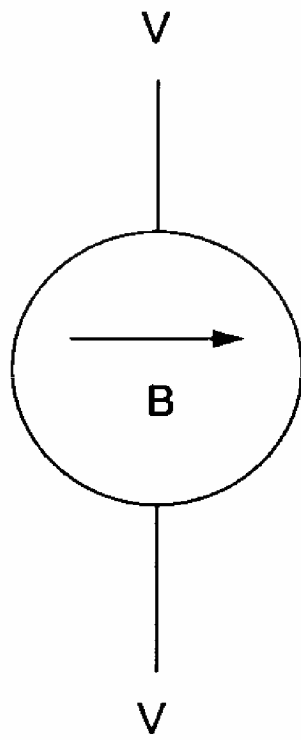
1. Uma bússola tende a oscilar antes de alinhar-se com o campo magnético da Terra. Considere uma agulha imantada de momento de dipolo magnético  $\mathbf{m}$  e momento de inércia  $I$ , suspensa de forma a poder oscilar livremente em torno de um eixo vertical, situada num campo magnético horizontal uniforme  $\mathbf{B}_0$ . As direções de  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{B}_0$  formam inicialmente um pequeno ângulo  $\theta_0$ . Calcule a frequência angular de oscilação (desprezando o amortecimento) e mostre que sua determinação permite medir  $|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{B}_0|$ .

2. A agulha imantada do problema 1 também produz um campo magnético, que, conforme será visto no capítulo 8, só difere do campo de um dipolo elétrico  $\mathbf{p}$  pelas substituições  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$ ,  $\epsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0$ , onde  $\mu_0$  é uma constante (permeabilidade magnética do vácuo). (a) Usando esse resultado, determine o campo magnético  $\mathbf{B}$  (em módulo, direção e sentido) produzido pela agulha num ponto  $P$  situado em seu prolongamento, a uma distância  $d$  da agulha. (b) Suponha que, com a agulha imobilizada numa direção horizontal, perpendicular ao campo magnético  $\mathbf{B}_0$  da Terra, outra agulha imantada é trazida para o ponto  $P$  definido na parte (a), ficando sujeita aos campos  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{B}_0$ . Determine o ângulo  $\alpha$  entre a orientação de equilíbrio da segunda agulha e  $\mathbf{B}_0$ . Mostre que, medindo-o, pode-se determinar a razão  $|\mathbf{m}| / |\mathbf{B}_0|$ . Combinando esse resultado com o do problema 1, obtém-se os valores de  $\mathbf{m}$  e de  $\mathbf{B}_0$ . Esse método é devido a Gauss.

3. (a) Calcule a frequência angular de rotação de um elétron no campo magnético da Terra, numa região em que ele possa ser tratado como uniforme e de intensidade 0,5 Gauss. (b). Para um elétron com energia cinética de 1 keV, típica daquela encontrada na aurora boreal, calcule o raio de curvatura nesse campo.



4. No espectrógrafo de massa de Bainbridge (fig.), há um campo elétrico uniforme  $\mathbf{E}$  e um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  perpendicular ao plano da figura na região entre as placas  $PP$ , ajustados de modo a formar um *filtro de velocidades*, ou seja, só deixar passar íons de velocidade  $v$  bem definida para a região semi-circular inferior, onde existe um outro campo uniforme  $\mathbf{B}'$  também perpendicular ao plano da figura. Mostre que, para íons de carga  $e$ , o raio  $R$  da órbita semicircular é proporcional à massa do íon, de forma que a placa fotográfica  $C$  registra um *espectro de massa*, em que a distância ao longo da chapa é proporcional à massa do íon.



5. Considere uma espira circular de raio  $a$  suspensa por um fio vertical VV de constante de torção  $k$ , situada num campo magnético  $B$  uniforme com a orientação inicial da figura. O momento de inércia da espira em relação ao eixo VV é  $I$ . Faz-se passar através da espira um pulso rápido de corrente de duração  $t$  e intensidade máxima  $i$ , tão curto que a espira não tem tempo de se mover durante o tempo  $t$ . Mostre que o ângulo de deflexão máximo do plano da espira,  $\theta_0$ , é proporcional à carga total  $q = it$  contida no pulso. Este é o princípio do *galvanômetro balístico* (em geral se utiliza uma bobina com  $N$  espiras).

# 8

## A LEI DE AMPÈRE

No capítulo precedente, discutimos os *efeitos* do campo magnético sobre partículas carregadas em movimento e sobre correntes em circuitos, sem nos preocuparmos com as *fontes* do campo magnético (exceto pela existência de ímãs permanentes, cuja natureza microscópica não foi analisada). Já que não existem pólos magnéticos isolados, quais são as fontes de  $\mathbf{B}$ ?

Em 1819, o físico dinamarquês Hans Christian Oersted, procurando ver se uma corrente elétrica atuaria sobre um ímã, colocou uma bússola (agulha imantada) perpendicular a um fio retilíneo por onde passava corrente, e não observou nenhum efeito. Entretanto, descobriu que, quando ela era colocada *paralelamente* ao fio, a bússola sofria uma deflexão, acabando por orientar-se perpendicularmente a ele!

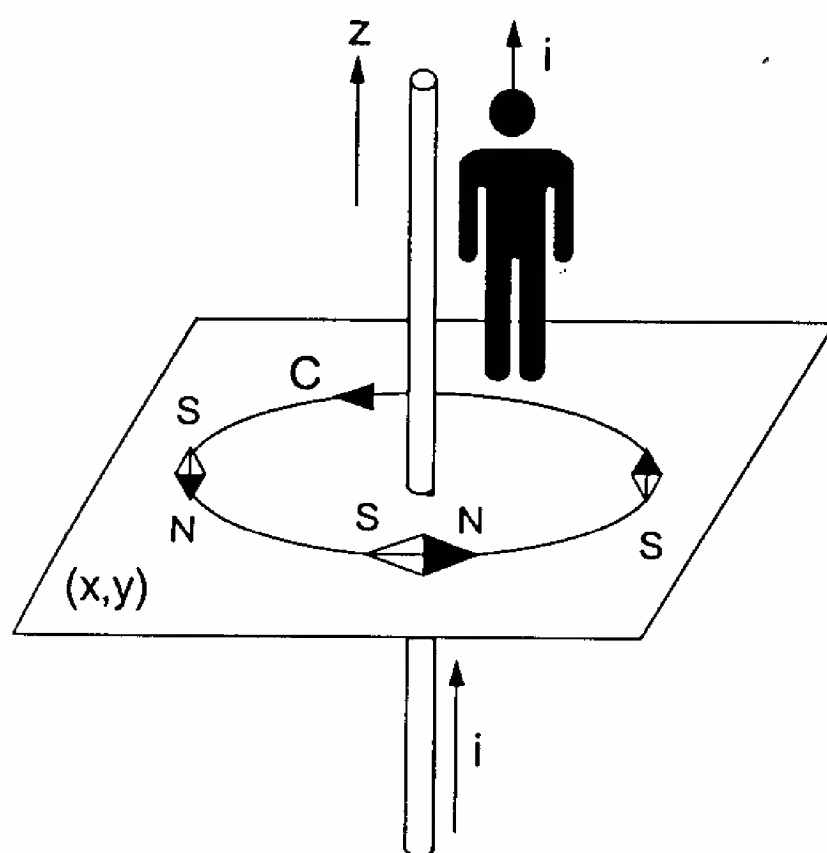


Figura 8.1 Campo magnético devido a uma corrente

Por conseguinte, *uma corrente produz um campo magnético* e, para um fio retilíneo que transporta corrente, as linhas de força magnéticas são *círculos* em planos perpendiculares ao fio, (fig. 8.1), cuja orientação (que dá o sentido de  $\mathbf{B}$ ) é *anti-horária* quando vista por um observador que vê o sentido da corrente atravessá-lo dos seus pés para a sua cabeça.

Os resultados de Oersted foram apresentados em 1820 numa reunião da Academia de Ciências da França, em Paris. O jovem físico André Marie Ampère assistiu a apresentação e, imediatamente após, deu início a uma série de experiências



belíssimas, cujo primeiro resultado, anunciado uma semana depois, dizia respeito à interação magnética entre dois fios transportando correntes paralelas. Ampère foi chamado por Maxwell de "o Newton da eletricidade".

## 8.1 A lei de Ampère

Como  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , as linhas de força magnéticas são necessariamente *fechadas* (possivelmente no infinito). Um exemplo são as linhas de força circulares em torno de um fio retilíneo com corrente (fig. 8.1). Logo, a *circulação* de  $\mathbf{B}$  ao longo de uma linha de força fechada é necessariamente  $\neq 0$  (positiva ou negativa conforme a orientação que se dê ao elemento de linha  $d\mathbf{l}$ ). Para uma curva fechada  $C$  qualquer orientada, com orientação definida da forma indicada na fig. 8.1, a circulação é

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

que às vezes é chamada de "força magnetomotriz", por analogia com a (6.8.10).

Resulta das experiências de Ampère que essa circulação é *proporcional à intensidade de corrente  $i$  total que atravessa a curva  $C$* : isto vale para *correntes estacionárias*.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = k i$$

Como  $|\mathbf{B}|$  mede-se em

$$\frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

e  $i$  em C/s, as unidades de  $k$  são

$$\frac{\text{N}}{(\text{C/s})^2} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

No SI

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i} \quad (8.1.1)$$

onde

$$\boxed{\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}} \quad (8.1.2)$$

A (8.1.1) é a *lei de Ampère para correntes estacionárias* e a constante  $\mu_0$  chama-se *permeabilidade magnética do vácuo* (cf. Seq. 11.2).

Na lei de Ampère,  $C$  é uma curva fechada *arbitrária* e  $i$  a corrente total que a atravessa. Em particular, se a curva  $C$  é inteiramente externa à região onde existem correntes,  $i = 0$  no 2.º membro.

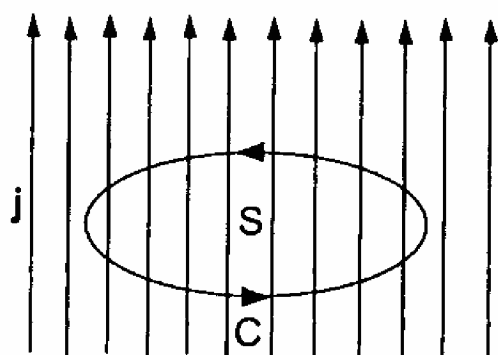


Figura 8.2 Circuito  $C$  interno à distribuição de corrente

Se aplicarmos a lei de Ampère no interior da distribuição de corrente, a uma superfície  $S$  limitada pelo contorno  $C$ , teremos (fig. 8.2)

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (8.1.3)$$

e, pelo teorema do rotacional,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (8.1.4)$$

onde a convenção sobre a orientação da normal  $\hat{\mathbf{n}}$  é a mesma nos dois casos. Logo,

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

o que tem de valer qualquer que seja  $S$ . Isso só é possível se

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (8.1.5)$$

As equações

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

são as *equações de Maxwell para o campo magnético no vácuo produzido por correntes estacionárias*, da mesma forma que

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

são as *equações de Maxwell para o campo eletrostático no vácuo produzido por cargas estáticas*.

Note que, se associarmos  $\mathbf{B}$  com  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{j}$  com  $\rho$ , o análogo de  $\epsilon_0$  é  $1/\mu_0$ :

$$\epsilon_0 \leftrightarrow 1/\mu_0 \quad (8.1.8)$$

A restrição a correntes estacionárias está embutida na forma local da lei de Ampère,  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ . Com efeito, como foi observado ao discutir os operadores vetoriais associados a  $\nabla$ , para qualquer vetor vale a identidade (4.5.14):

$$\text{div rot } \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

(8.1.9)

Logo,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \Rightarrow \text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 \text{div } \mathbf{j} \quad \{ \text{div } \mathbf{j} = 0$$

que é a condição para que a distribuição de correntes seja estacionária.

A lei de Ampère é útil para o cálculo de  $\mathbf{B}$  quando e somente quando a distribuição de correntes é especialmente *simétrica*: é preciso que a direção e sentido de  $\mathbf{B}$  possam ser obtidos como consequência da simetria, e que a magnitude  $|\mathbf{B}|$  também esteja simetricamente distribuída, permitindo assim o cálculo da força magnetomotriz. Há uma grande analogia com a utilização da lei de Gauss para o cálculo de  $\mathbf{E}$  na eletrostática.

*Exemplo: Campo magnético de uma corrente retilínea*

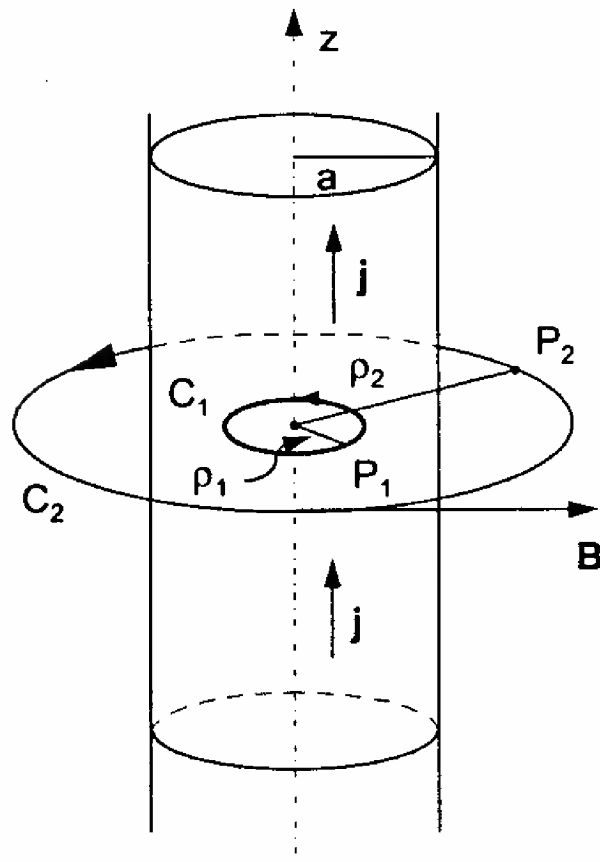


Figura 8.3 Linhas de força de  $\mathbf{B}$  em torno de uma corrente num fio cilíndrico

Logo, tomando coordenadas cilíndricas com eixo  $Oz \parallel \mathbf{j}$ , temos, no plano de uma secção transversal (fig. 8.4),

$$\mathbf{B} = B(\rho) \hat{\phi}$$

o que dá, com  $d\mathbf{l} = \rho d\phi \hat{\phi}$ ,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \rho B(\rho)$$

Para um ponto  $P_2$  externo ao fio ( $\rho \geq a$ ), a corrente que atravessa  $C$  é a corrente total  $i$ . Logo, a lei de Ampère dá

Consideremos um fio condutor muito longo, cilíndrico, de raio  $a$ , que transporta uma corrente  $i$ . A densidade de corrente  $\mathbf{j}$  está uniformemente distribuída sobre a secção transversal, de forma que

$$i = \pi a^2 j$$

Pela simetria axial, as linhas de força de  $\mathbf{B}$ , dentro e fora do fio, são círculos concêntricos, orientados como na fig. 8.3, e a magnitude de  $B$  não varia ao longo de cada um desses círculos.

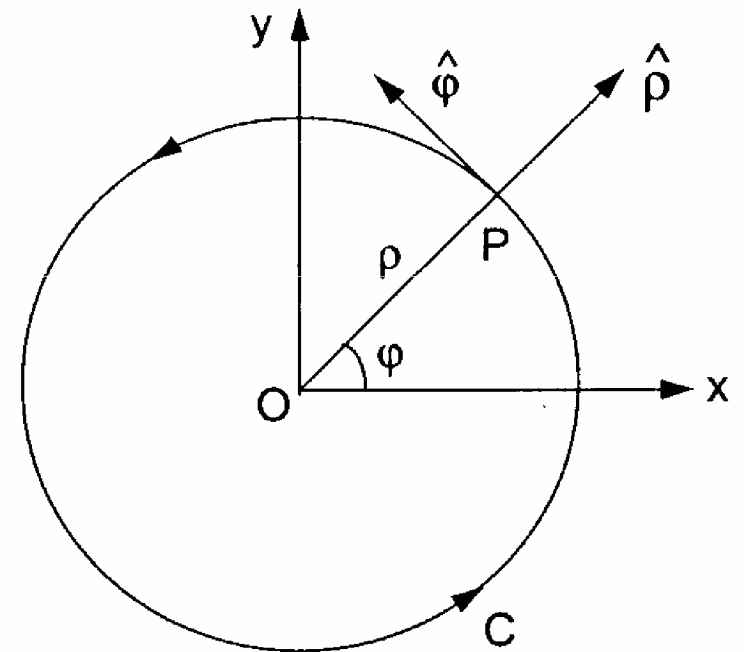


Figura 8.4 Secção transversal do fio

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 i \quad \left\{ \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} (\rho \geq a) \right. \quad (8.1.10)$$

Já para um ponto  $P_1$  interno ( $\rho < a$ ), a corrente que atravessa  $C$  é

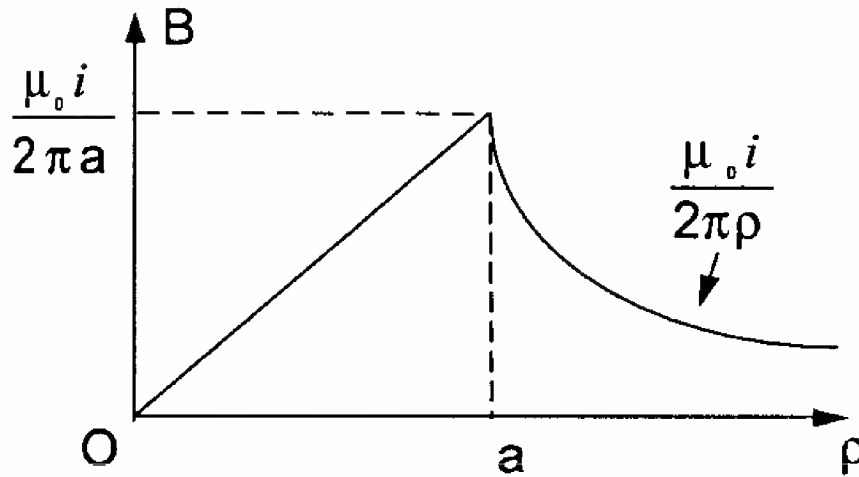
$$\pi\rho^2 j = \pi\rho^2 \cdot \frac{i}{\pi a^2} = \frac{\rho^2}{a^2} i$$

Logo,

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 \frac{\rho^2}{a^2} i \quad \left\{ \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\rho}{a^2} (\rho \leq a) \right. \quad (8.1.11)$$

Finalmente,

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\rho}{a^2} \hat{\phi} (0 \leq \rho \leq a) \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\phi} (a \leq \rho) \end{cases} \quad (8.1.12)$$



O comportamento de  $|\mathbf{B}|$  em função de  $\rho$  está representado no gráfico da fig. 8.5.

Figura 8.5 Magnitude de  $\mathbf{B}$  em função da distância ao eixo

## 8.2 O potencial escalar magnético

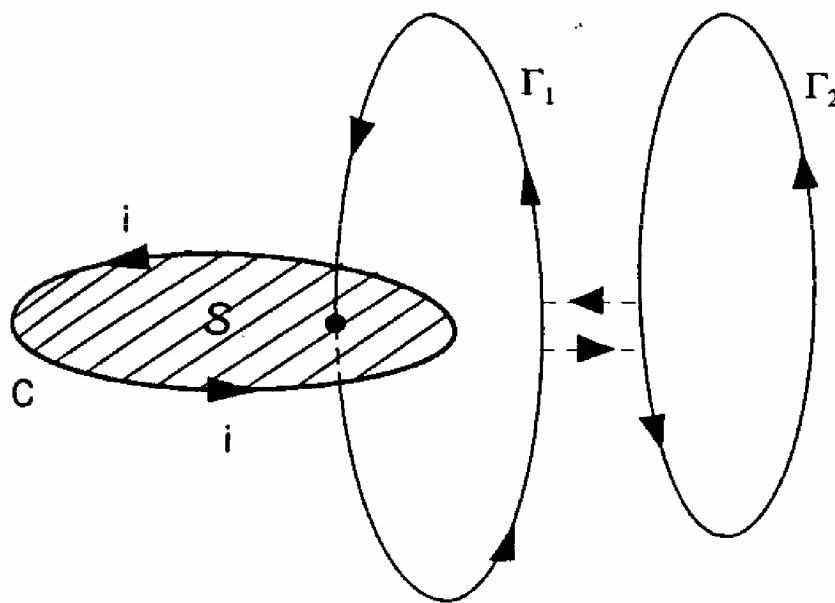


Figura 8.6 O caminho  $\Gamma_1$  atravessa  $C$ ;  $\Gamma_2$  não atravessa.

Consideremos uma espira plana  $C$  percorrida por uma corrente  $i$ . O interior da espira é uma área plana  $S$ . Pela lei de Ampère, como qualquer curva fechada  $\Gamma_2$  que não corta  $S$  não é atravessada pela corrente (fig. 8.6), temos

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (8.2.1)$$

ou seja,

$$\int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

é independente do caminho que liga 1 a 2, desde que só se considerem caminhos que não cortam  $S$ .

Com essa restrição, podemos definir, por analogia com  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , um potencial escalar magnético  $\psi$  tal que

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \psi \quad ; \quad \int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 d\psi = \psi_1 - \psi_2 \quad (8.2.2)$$

Entretanto, se admitirmos um caminho como  $\Gamma_1$ , que é atravessado pela corrente  $i$ , na fig. 8.6, no sentido negativo, a lei de Ampère dá

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 i \quad (8.2.3)$$

e em sentido oposto teríamos  $+\mu_0 i$ . Se percorrêssemos  $\Gamma_1$   $n$  vezes seguidas, teríamos  $-n\mu_0 i$ ; em sentido oposto,  $+n\mu_0 i$ .

Como ilustrado na fig. 8.6, podemos ligar  $\Gamma_2$  a  $\Gamma_1$  por uma "ponte", que é percorrida duas vezes em sentidos opostos ( $\overleftrightarrow{\quad}$ ), de modo que as contribuições se cancelam, e obter um novo caminho fechado que atravessa  $S$  — e pode atravessar  $S$  um número qualquer de vezes, em ambos os sentidos.

Assim, se não introduzirmos restrições,  $\psi$  poderá assumir, em cada ponto, infinitos valores, que diferem uns dos outros por múltiplos inteiros de  $\mu_0 i$ .

Para tornar unívoco o valor de  $\psi$ , podemos introduzir uma *barreira*: uma superfície geométrica de contorno  $C$  — por exemplo a superfície plana  $S$  — impondo que nenhuma curva possa atravessar esta barreira. O preço que se paga por isso é que  $\psi$ , embora unívoco, sofre uma *descontinuidade* ao atravessar  $S$ : se 1 e 2 são pontos imediatamente abaixo e acima de  $S$  (em relação ao sentido da normal  $\hat{\mathbf{n}}$ ), teremos (fig. 8.7).

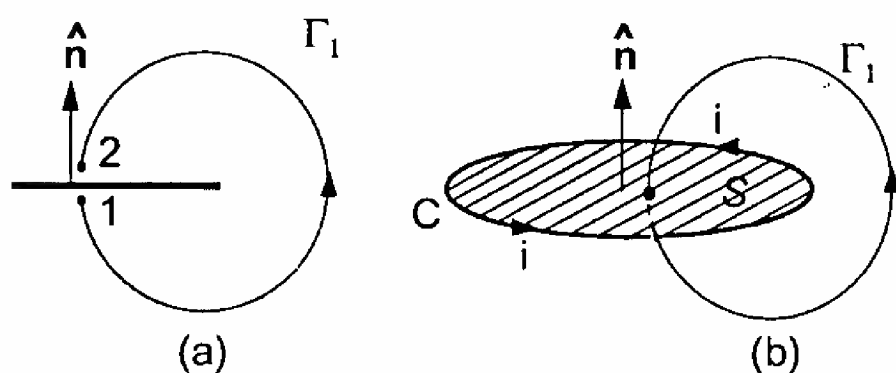


Figura 8.7 Circuito  $\Gamma_1$  interrompido por uma barreira [(a) vista lateral]

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = -\int_{1(\Gamma_1)}^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad (8.2.4)$$

Vamos mostrar agora que um potencial desse tipo seria produzido por uma *camada de dipolos magnéticos* distribuídos sobre a superfície  $S$ . Para isso, vamos recapitular primeiro o problema correspondente na eletrostática (Seç. 4.4).

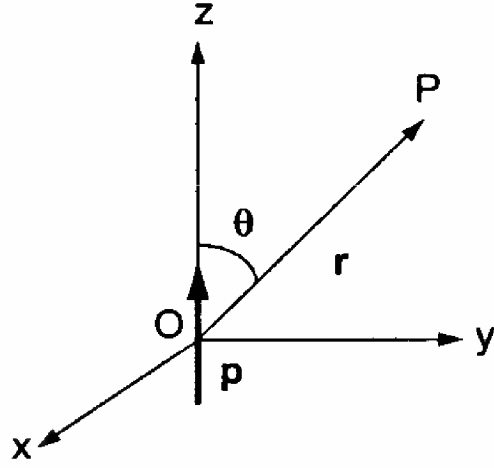


Figura 8.8 Dipolo pontiforme na origem

Vimos lá que o potencial eletrostático num ponto  $P$  devido a um "dipolo pontiforme"  $\mathbf{p}$  na origem é

$$V(P) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (8.2.5)$$

onde  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ .

Da mesma forma que consideramos uma densidade superficial de cargas  $\sigma$  sobre uma superfície  $S$

$$\left( \sigma = \frac{dq}{dS} \right)$$

consideramos na (4.4.11) uma *densidade superficial de dipolos*  $\delta$ , tal que um elemento de superfície  $dS$  tem um momento de dipolo  $d\mathbf{p} = \delta dS = \delta \hat{\mathbf{n}} dS$  ( $\hat{\mathbf{n}} \equiv$  versor da normal a  $dS$ ). O potencial em  $P$  devido a  $d\mathbf{p}$  é então [fig. 8.9(a)]

$$dV = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

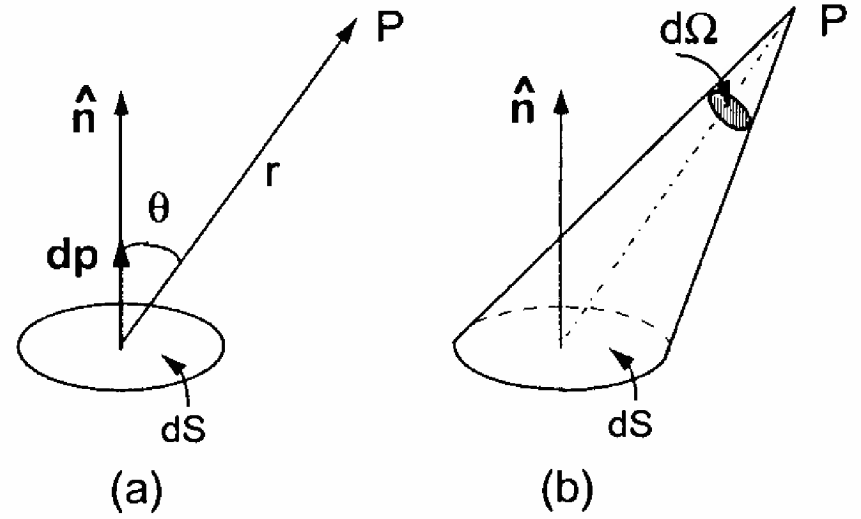


Figura 8.9 (a) Dipolo  $d\mathbf{p}$  associado a  $dS$ ; (b) Ângulo sólido  $d\Omega$

Mas

$$\frac{dS \cos \theta}{r^2} = d\Omega$$

é o *ângulo sólido* sob o qual  $dS$  é visto a partir do ponto  $P$ .

Logo com  $\delta$  uniforme,

$$V(P) = \int dV = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

$$V(P) = \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (8.2.6)$$

onde  $\Omega$  é o *ângulo sólido total* sob o qual a superfície  $S$  é vista a partir de  $P$ . Note que  $\Omega$  só depende do contorno  $C$  de  $S$ : é o mesmo para qualquer superfície limitada por  $C$  (fig. 8.10).

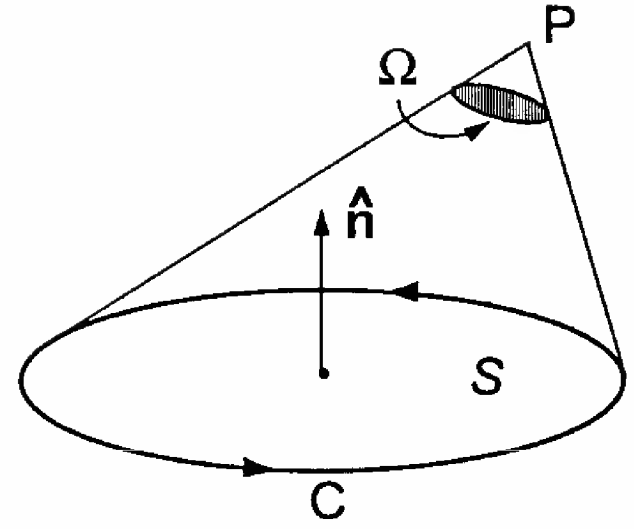


Figura 8.10 Ângulo sólido  $\Omega$  associado à curva  $C$ , vista de  $P$

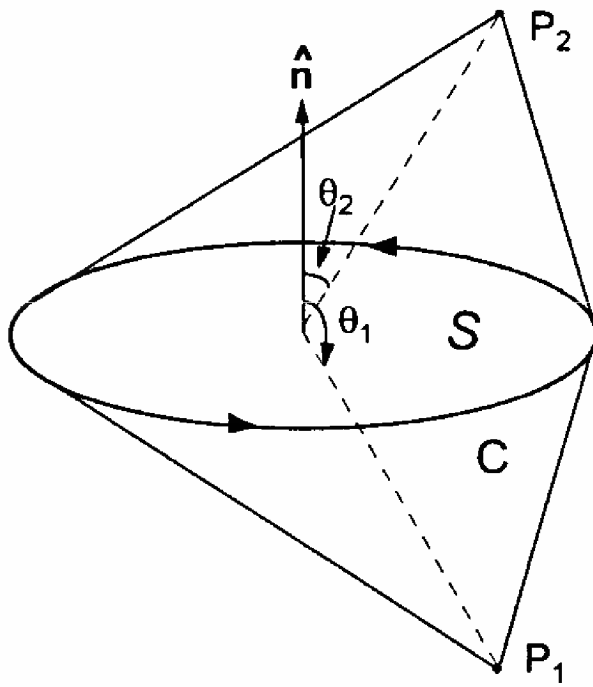


Figura 8.11 Sinal de  $\Omega$

Para pontos  $P_2$  acima de  $S$ ,  $\Omega > 0$  ( $\theta$  é agudo); para  $P_1$  abaixo de  $S$  (fig. 8.11)  $\Omega < 0$  ( $\theta$  é obtuso). Se  $P_2$  tende a  $S$  por cima,  $\Omega \rightarrow +2\pi$  (semiespaço); se  $P_1$  tende a  $S$  por baixo,  $\Omega \rightarrow -2\pi$ . Logo, como vimos na (4.4.15),

$$V(P_2) - V(P_1) \rightarrow \frac{\delta}{4\pi\epsilon_0} (\Omega_2 - \Omega_1) = \frac{\delta}{\epsilon_0} \quad (8.2.7)$$

mostrando que  $V$  tem uma descontinuidade  $\delta/\epsilon_0$  através de  $S$ .

Para passar de dipolos elétricos para magnéticos, basta substituir

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} = \delta d\mathbf{S} &\rightarrow d\mathbf{m} = i d\mathbf{S} \\ 1/\epsilon_0 &\rightarrow \mu_0 \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

onde a última relação decorre da (8.1.8).

Concluimos que

$$\psi(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \Omega_P \quad (8.2.9)$$

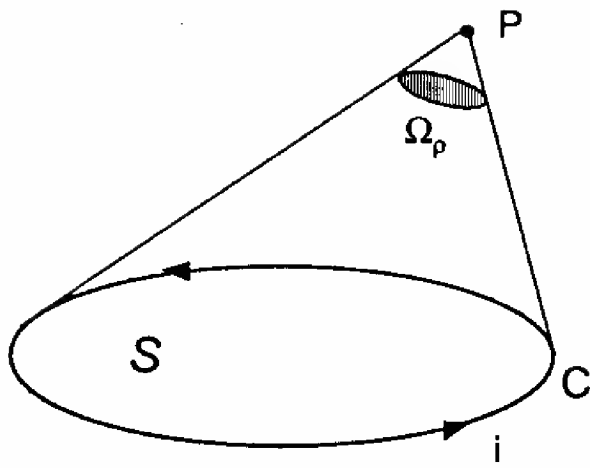


Figura 8.12 Ângulo sólido associado à espira  $C$  e ao ponto  $P$

onde  $\Omega_P$  é o ângulo sólido sob o qual o circuito  $C$  é visto a partir de  $P$  (fig. 8.12), é o potencial escalar magnético criado pela corrente  $i$ , pois  $\mathbf{B} = -\text{grad } \psi$  satisfaz, por construção, a lei de Ampère. Note mais uma vez que  $\Omega$  só depende de  $C$ , e não da forma da superfície  $S$  que se apóia sobre  $C$ .

Note também que o *momento de dipolo magnético total* associado à corrente é

$$\mathbf{m} = \int d\mathbf{m} = i \int_S d\mathbf{S} = i\mathbf{S} \quad (8.2.10)$$

que é exatamente o resultado já obtido na (7.2.6) para a *resposta* do circuito a um campo  $\mathbf{B}$  externo ( $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ ). Vemos agora que o campo  $\mathbf{B}$  *criado* pela corrente  $i$  também é equivalente ao de um dipolo magnético, dado pela mesma expressão:  $\mathbf{m} = i\mathbf{S}$ . Esse resultado é devido a Ampère (1823).

Existe um outro tipo de potencial em termos do qual se pode exprimir o campo  $\mathbf{B}$ , chamado *potencial vetor*, que tem a vantagem de não ser descontínuo como  $\psi$ , mas cuja introdução exigiria maiores conhecimentos de análise vetorial, de modo que não a discutiremos aqui (cf. Seç. 12.6).

### 8.3 A lei de Biot e Savart

Conforme acabamos de ver, uma corrente estacionária  $i$  num circuito  $C$  produz num ponto  $P$  de vetor de posição  $\mathbf{R}$  em relação a uma origem  $O$  (fig. 8.13) um campo magnético

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \psi, \quad \psi(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \Omega_R \quad (8.3.1)$$

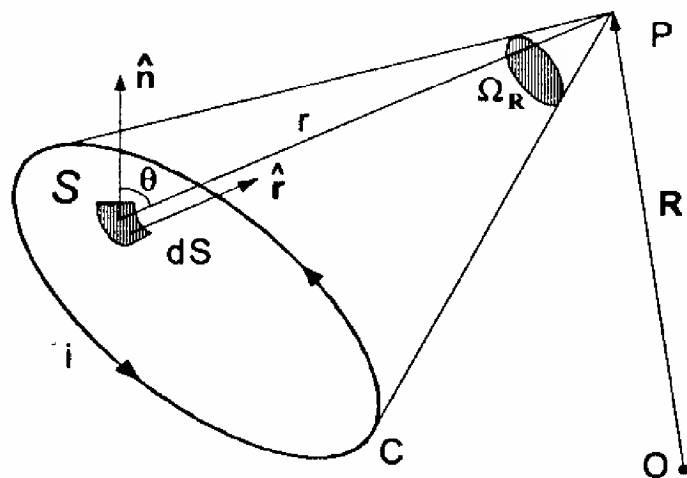


Figura 8.13 Ângulo sólido visto a partir de  $R$

onde  $\Omega_R$  é o ângulo sólido sob o qual o circuito  $C$  é visto a partir de  $R$ .

$$\Omega_R = \int_S \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (8.3.2)$$

onde  $S$  é *qualquer* superfície de contorno  $C$ .



Se deslocarmos o ponto  $P$  de  $\mathbf{R}$  para  $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$ , onde  $d\mathbf{R}$  é infinitésimo, teremos

$$d\psi \equiv \psi(\mathbf{R} + d\mathbf{R}) - \psi(\mathbf{R}) = \text{grad } \psi \cdot d\mathbf{R} = -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R}$$

ou seja,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \psi(\mathbf{R}) - \psi(\mathbf{R} + d\mathbf{R}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} (\Omega_{\mathbf{R}} - \Omega_{\mathbf{R}+d\mathbf{R}}) \quad (8.3.3)$$

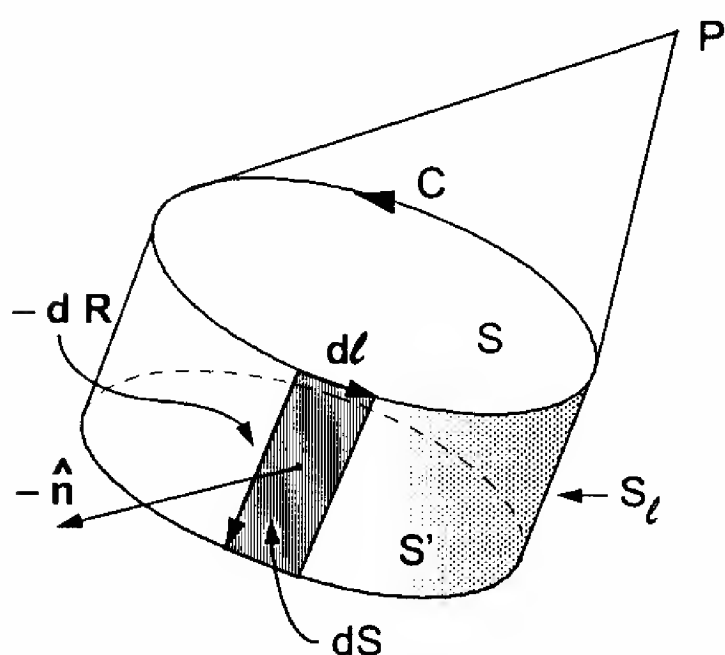


Figura 8.14 Variação de ângulo sólido quando  $C$  é deslocado de  $d\mathbf{R}$

Mas, para calcular  $\Omega_{\mathbf{R} + d\mathbf{R}}$ , tanto faz deixar  $C$  fixo e deslocar o ponto  $P$  de  $d\mathbf{R}$  como deixar  $P$  fixo e deslocar o circuito  $C$  de  $-d\mathbf{R}$  (fig. 8.14)

$$\Omega_{\mathbf{R}+d\mathbf{R}} = \int_{S'} \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (8.3.4)$$

onde  $S'$  é a superfície  $S$  transladada de  $(-d\mathbf{R})$ .

Note, porém, que, se adicionarmos a  $S'$  a superfície lateral  $S_l$  do cilindro varrido durante o deslocamento,  $S' + S_l$  é ainda uma superfície de contorno  $C$ .

Logo,

$$\Omega_{\mathbf{R}} = \int_{S'+S_l} \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \int_{S'} + \int_{S_l}$$

Por conseguinte,

$$\Omega_{\mathbf{R}} - \Omega_{\mathbf{R}+d\mathbf{R}} = \int_{S_l} \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

ou seja, a diferença é a integral sobre a superfície lateral  $S_l$  do cilindro varrido.

Lembrando que  $\theta$  é o ângulo entre  $\hat{\mathbf{n}}$  (versor da normal a  $dS$ ) e  $\hat{\mathbf{r}}$  (versor da direção que liga  $dS$  ao ponto  $P$ ), temos

$$dS \cos \theta = dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

e fica

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{S_l} \frac{dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Mas a fig. 8.14 mostra que

$$(-dS)\hat{\mathbf{n}} = (-d\mathbf{R}) \times d\mathbf{l}$$

pois a normal  $\hat{\mathbf{n}}$  deve apontar, tanto em  $S_l$  como em  $S'$ , para o semiespaço que contém  $P$ . Varrer  $S_l$  equivale a varrer  $C$  com  $d\mathbf{l}$ , ou seja,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{(d\mathbf{R} \times d\mathbf{l}) \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.3.5)$$

Como  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  para quaisquer vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , e  $\mathbf{c}$ , isto equivale a

$$d\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} d\mathbf{R} \cdot \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.3.6)$$

o que tem de valer para *qualquer* deslocamento  $d\mathbf{R}$ . Isso só é possível se

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.3.7)$$

Essa é a *lei de Biot e Savart*, que dá o campo magnético devido a uma distribuição de corrente estacionária de intensidade  $i$ , no circuito  $C$ , sob a forma de uma integral de linha ao longo do circuito.

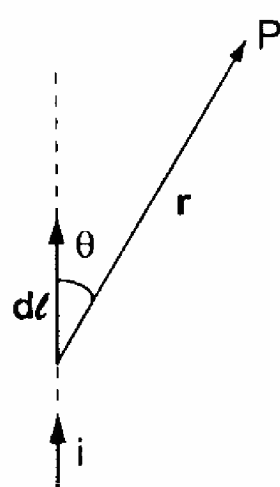


Figura 8.15 Ângulo  $\theta$  entre  $d\mathbf{l}$  e  $\mathbf{r}$

Freqüentemente se enuncia essa lei decompondo  $C$  em "*elementos de corrente*"  $i d\mathbf{l}$  e dizendo que o campo num ponto  $P$  devido a um tal elemento é

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (8.3.8)$$

ou seja, é proporcional a  $i dl$  e a  $\sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $d\mathbf{l}$  e  $\mathbf{r}$  (fig. 8.15); cai com  $r^{-2}$ , como o campo da lei de Coulomb, e tem direção e sentido dados pela regra do produto vetorial (no caso da fig. 8.15, perpendicular ao plano do papel e dirigido para baixo).

Entretanto, é importante lembrar que uma corrente estacionária sempre está associada a um *circuito fechado*, e não há justificativa para decompô-la em "elementos de corrente", exceto como etapa auxiliar no cálculo: obtém-se o resultado correto *integrando*  $d\mathbf{F}$  ao longo de *todo o circuito fechado*  $C$  percorrido pela corrente

Não levar isso em conta pode conduzir a resultados incorretos: por exemplo, as forças de interação magnética entre dois elementos de corrente podem não obedecer à 3.<sup>a</sup> lei de Newton, embora as forças integradas sobre os dois circuitos de corrente *estacionária* aos quais eles pertencem sempre obedecem à 3.<sup>a</sup> lei.

### Exemplo 1 - Campo de uma corrente retilínea num fio

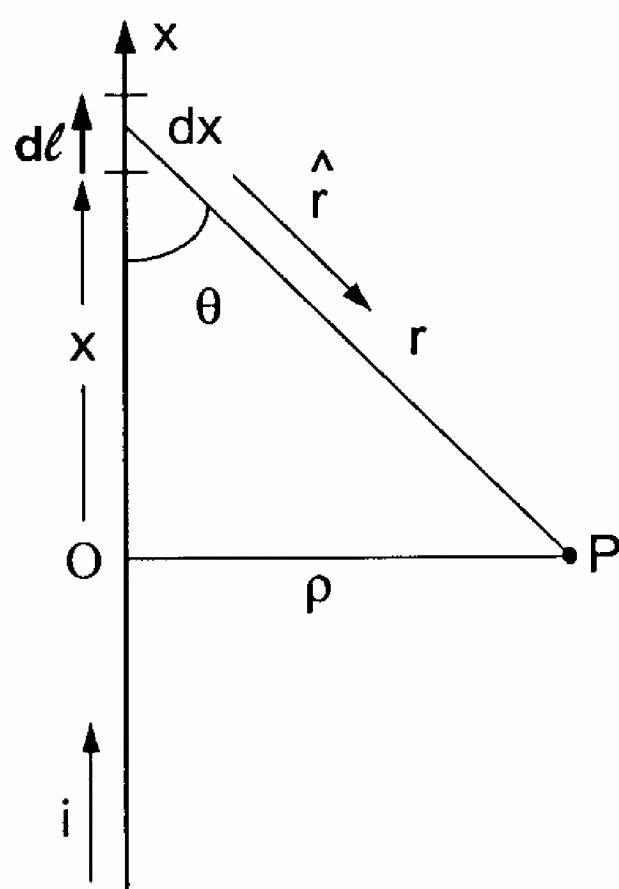


Figura 8.16 Fio retilíneo

Todos os elementos de corrente contribuem em  $P$  com  $d\mathbf{B}(P)$  na mesma direção e sentido (dados pelo vetor  $\hat{\phi}$  da fig. 8.4), de modo que basta somar (integrar) as amplitudes:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{dx \sin \theta}{r^2} \quad ; \quad B = \int dB$$

Por simetria, para um fio infinito em que a corrente começa e termina no infinito, (fig. 8.16), basta integrar sobre  $x$  positivo ( $\theta$  de  $\frac{\pi}{2}$  até 0) e multiplicar por 2:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta = \frac{\rho}{r} \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{\sin \theta}{\rho} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin \theta}{r^2} &= \frac{\sin^3 \theta}{\rho^2} \end{aligned} \right. \\ x &= \rho \cot \theta \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= -\rho \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \frac{dx \sin \theta}{r^2} = -\frac{\sin \theta d\theta}{\rho}$$

$$B = -2 \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{\rho} \right) \left( \frac{\mu_0 i}{4\pi} \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \left[ \cos \theta \right]_{\pi/2}^0 \quad \left\{ \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\phi} \right.$$

que é o resultado obtido na (8.1.12) pela lei de Ampère.

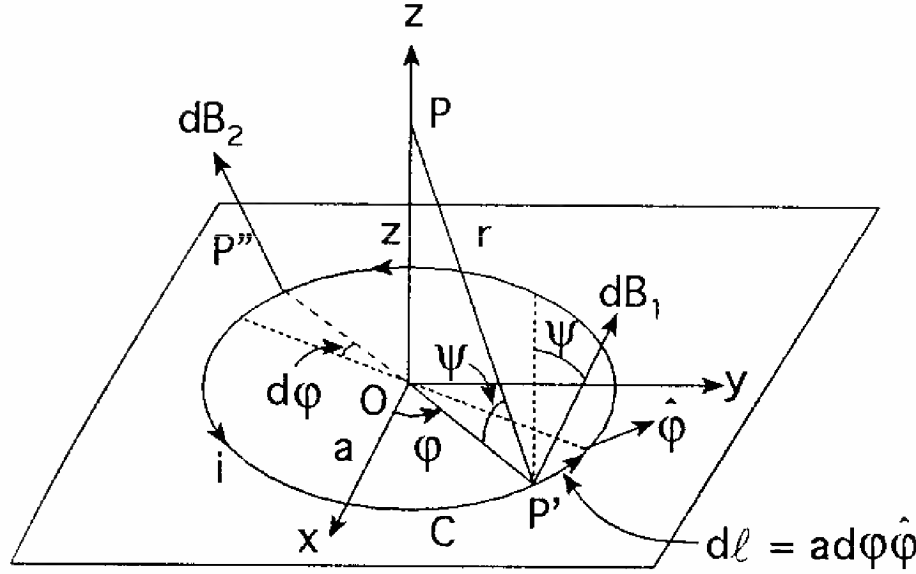
*Exemplo 2 - Campo de uma espira circular no eixo**(a) Lei de Biot e Savart*

Figura 8.17 Campo de uma espira circular no eixo

Consideremos uma espira circular de raio  $a$  percorrida por uma corrente  $i$  (fig. 8.17). Queremos calcular  $\mathbf{B}$  num ponto  $P$  do eixo  $OP \equiv Oz$ , como soma de contribuições  $d\mathbf{B}$  devidas aos elementos de corrente  $d\mathbf{l} = (a d\varphi) \hat{\boldsymbol{\phi}} = dl \hat{\boldsymbol{\phi}}$ . Como o plano  $P'OP$  é perpendicular a  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , também  $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{r}$  é perpendicular a  $d\mathbf{l}$ , de forma que  $|d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}| = dl$ . A contribuição  $d\mathbf{B}_1$  do elemento em  $P'$  é perpendicular a  $d\mathbf{l}$ . Logo está no plano  $P'OP$ , tendo portanto uma componente radial (direção

$OP'$ ) e outra vertical (direção  $z$ ). Mas as componentes radiais das contribuições  $d\mathbf{B}_1$  e  $d\mathbf{B}_2$  de elementos diametralmente opostos da espira (em  $P'$  e  $P''$ , fig. 8.17) se cancelam, e as verticais se somam.

Basta considerar portanto as componentes  $z$ ,

$$dB_z = \frac{\mu_0 i dl}{4\pi r^2} \cos\psi$$

Vemos na fig. 8.17 que  $\psi = \angle (d\mathbf{B}_1, Oz) = \angle P\hat{P}'O$  (lados perpendiculares). Logo,  $\cos\psi = a/r$ , e vem

$$dB_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cdot \frac{a}{r} dl = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} dl \quad \left\{ \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \int dB_z = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} \underbrace{\oint_C dl}_{2\pi a} \hat{\mathbf{z}} \right.$$

pois  $r = \text{constante}$  ao longo de  $C$ . Finalmente,

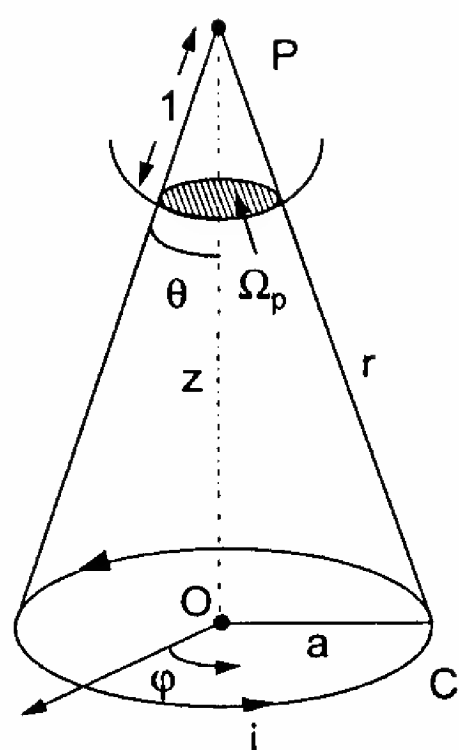
$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3} \hat{\mathbf{z}}} \quad (8.3.9)$$

*(b) Potencial magnético*

Vimos que o potencial magnético  $\psi(P)$  é dado por

$$\boxed{\psi(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \Omega_P} \quad (8.3.10)$$

onde  $\Omega_P$  é o ângulo sólido do qual o circuito  $C$  é visto a partir do ponto  $P$ .

Figura 8.18 Ângulo sólido  $\Omega_p$ .

Conforme mostra a fig. 8.18, esse é o ângulo sólido associado a um cone de ângulo de abertura  $\theta$ , onde  $\cos \theta = z/r$ ;  $\Omega_p$  é a área de uma esfera de raio = 1, centrada em  $P$ , que é interceptada por este cone. Como o elemento de área sobre essa esfera é  $\sin \theta' d\theta' d\varphi$ ,

$$\Omega_p = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = 2\pi (-\cos \theta') \Big|_0^\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_p = 2\pi(1 - \cos \theta) \end{array} \right. \quad (8.3.11)$$

Logo, como  $r = (a^2 + z^2)^{1/2}$

$$\psi(z) = \frac{\mu_0 i}{2} \left[ 1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (8.3.12)$$

A expressão obtida é válida no semiespaço "acima" de  $C$ , onde  $\Omega_p > 0$ ; no semiespaço "abaixo" é preciso trocar o sinal ( $\Omega_p < 0$ ).

A partir de  $\psi$ , calculamos  $\mathbf{B}$  por

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\text{grad } \psi(z) = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\mu_0 i}{2} \cdot \frac{(a^2 + z^2 - z^2)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i a^2}{2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8.3.13)$$

que é o mesmo resultado (8.3.9). Em particular, o campo no centro da espira é dado por

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{2a} \hat{\mathbf{z}} \quad (8.3.14)$$

### Espira como dipolo magnético

Para  $z \gg a$ , resulta

$$\mathbf{B}(z) \approx \frac{\mu_0 i a^2}{2 z^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 i \mathbf{S}}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi z^3} \quad (8.3.15)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a área orientada da espira e  $\mathbf{m} = i\mathbf{S}$  o momento de dipolo magnético associado a ela.

Com a correspondência  $1/\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$ , este é o mesmo resultado (4.4.10) para o campo de um dipolo elétrico no eixo. Para um ponto qualquer  $\mathbf{r}$ , com  $r \gg a$ , temos, analogamente à (4.4.8), o *campo de dipolo magnético*.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad \mathbf{m} = i\mathbf{S} = \pi a^2 i \hat{\mathbf{z}} \quad (8.3.16)$$

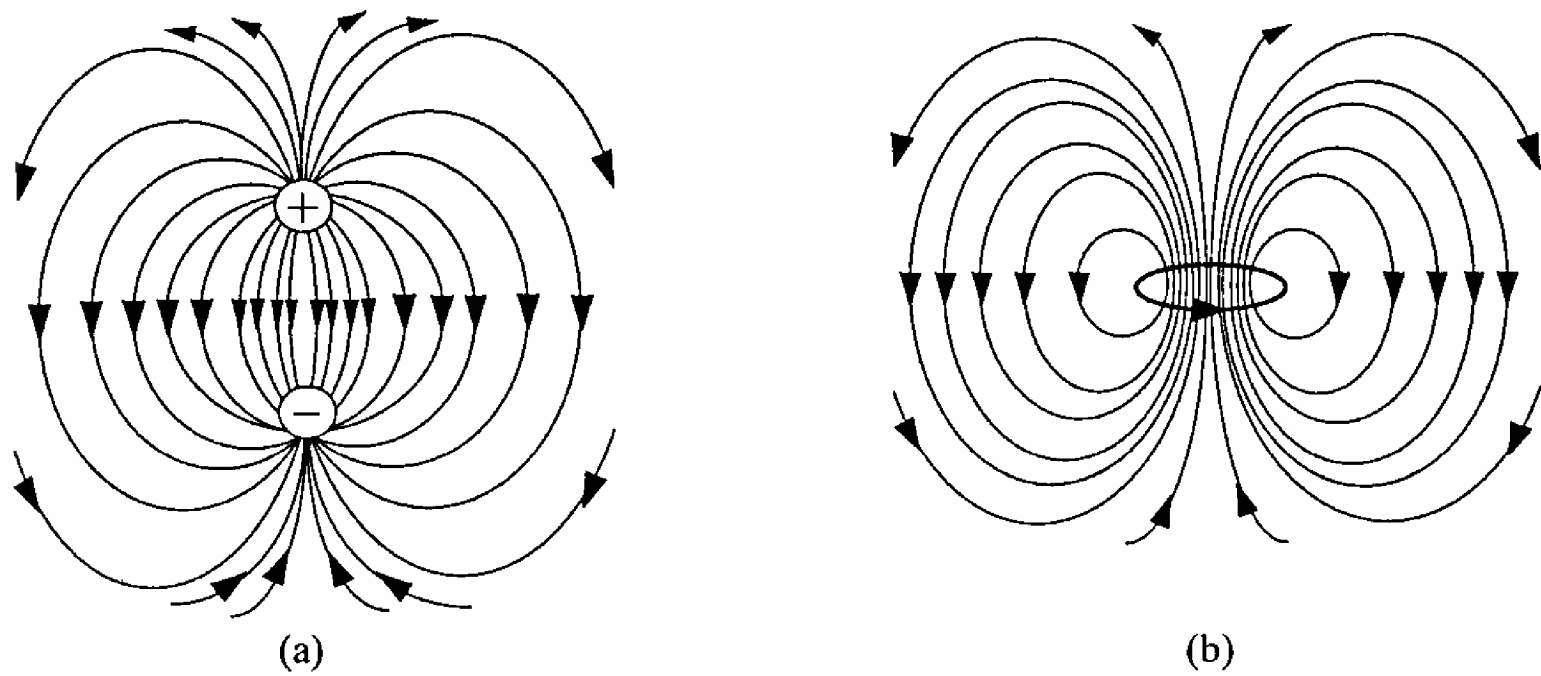


Figura 8.19 Comparação entre as linhas de força do campo de um dipolo elétrico (a) e de um dipolo magnético (b).

Para distâncias muito maiores que as dimensões do dipolo, os dois campos têm a mesma estrutura, mas não a pequenas distâncias. As linhas de  $\mathbf{E}$  começam e terminam nas cargas; as de  $\mathbf{B}$  são fechadas, e "atravessam" o dipolo em sentido oposto às de  $\mathbf{E}$  (fig. 8.19).

### Exemplo 3 - Bobina toroidal

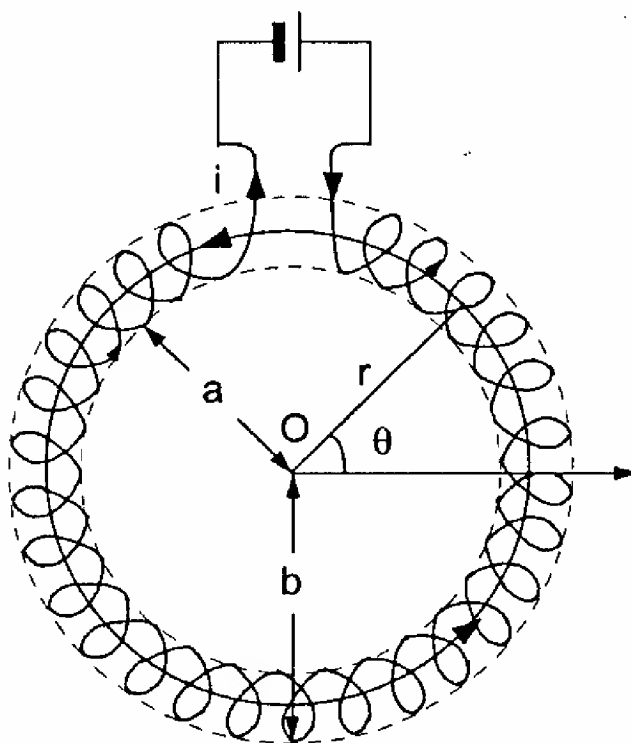


Figura 8.20 Bobina toroidal

Consideremos uma bobina enrolada em forma de toro, de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , e com um número muito grande  $N$  de espiras (de modo que espiras adjacentes estão muito próximas entre si), percorrida por uma corrente estacionária  $i$  (fig. 8.20).

Por simetria (considerando também a superposição dos campos das espiras), as linhas de  $\mathbf{B}$  dentro da bobina devem ser círculos concêntricos com o centro  $O$  do toróide, e a magnitude de  $\mathbf{B}$  deve ser independente de  $\theta$ . Logo, tomando

uma linha circular  $C$  de raio  $r$ , a lei de Ampère dá

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 Ni \quad (8.3.17)$$

pois as  $N$  espiras, de corrente  $i$ , atravessam  $C$ . Logo,

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (a < r < b) \quad (8.3.18)$$

Para  $r < a$ ,  $C$  não seria atravessado pela corrente, de forma que  $\mathbf{B} = 0$ ; para  $r > b$ ,  $C$  é atravessado duas vezes por cada espira, uma com  $i$  entrando e a outra saindo, de modo que a intensidade *resultante* que atravessa  $C$  é novamente  $= 0$ , ou seja,

$$\mathbf{B}(r) = 0 \quad (r < a \text{ ou } r > b) \quad (8.3.19)$$

Assim, o campo  $\mathbf{B}$  fica *inteiramente confinado* dentro do toróide\*, o que é útil em muitas aplicações (há alguma analogia com o capacitor plano).

#### Exemplo 4 - Campo de um solenóide

O raio médio do toróide no exemplo 3 é

$$R = \frac{1}{2}(a + b)$$

e podemos escrever

$$N = 2\pi R n$$

onde  $n$  é o número médio de espiras por unidade de comprimento ao longo do toróide.

O resultado obtido para o toróide fica então

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r) &= \mu_0 n i \frac{R}{r} \hat{\theta} \quad (a < r < b) \\ \mathbf{B}(r) &= 0 \text{ fora do toróide} \end{aligned} \quad (8.3.20)$$

Que acontece se fizermos  $a$  e  $b$  tender a  $\infty$ , mantendo fixa a diferença  $b - a$ , que corresponde ao diâmetro do toróide? Como o limite de um arco de círculo quando o raio

---

\* Isto não é rigorosamente exato, pois as espiras descrevem uma hélice, de forma que a corrente tem uma pequena componente axial, que dá a volta ao toróide, mas o campo que "escapa" é muito pequeno, em confronto com o campo interno, para  $N$  grande.

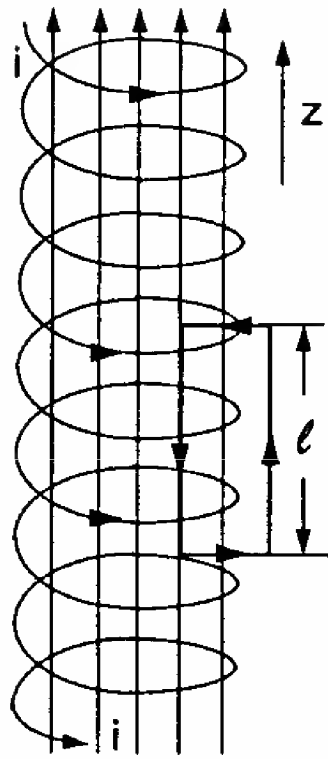


Figura 8.21 Solenóide

do círculo  $\rightarrow \infty$  é um segmento de reta, o limite do toróide é um *solenóide* infinito (bobina cilíndrica). Supomos que se mantém constante o número  $n$  de espiras por unidade de comprimento, com um enrolamento sempre muito compacto (espiras adjacentes bem próximas). Temos então  $R/r \rightarrow 1$  ( $R \rightarrow \infty$ ), o que dá

$\mathbf{B} = \mu_0 n i \hat{\mathbf{z}} \quad \text{dentro do solenóide}$ $= 0 \quad \text{fora do solenóide}$	(8.3.21)
---	----------

ou seja, o campo magnético fica *confinado dentro do solenóide*, onde é *uniforme* e tem a *direção axial*, e *sentido positivo* em relação às espiras orientadas (fig. 8.2.1). A *magnitude B do campo* é  $\mu_0$  vezes o *produto da intensidade de corrente pelo número de espiras / (unidade de comprimento)*.

Esse último resultado também decorre imediatamente da uniformidade, direção e sentido do campo, aplicando a lei de Ampère a um circuito retangular como o ilustrado na fig. 8.21(verifique!).

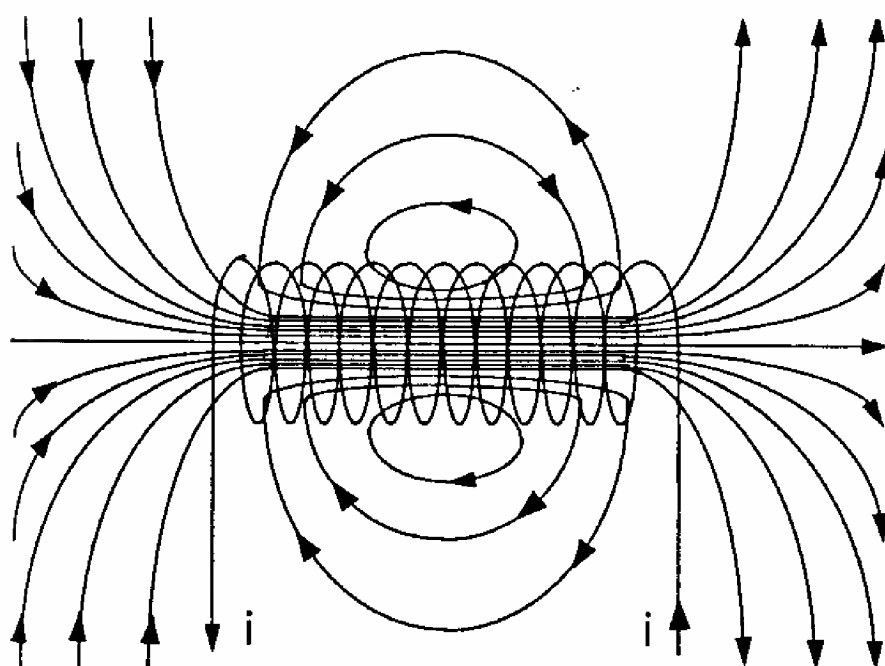


Figura 8.22 Campo de um solenóide finito

Para um solenóide real, que é finito, o campo "escapa" pelos interstícios entre as espiras e, principalmente, pelas extremidades do solenóide, mas (fig. 8.22) o campo na região central ainda permanece, com boa aproximação, uniforme e dado pela expressão acima; o campo fora é muito menos intenso do que dentro.



## 8.4 Forças magnéticas entre correntes

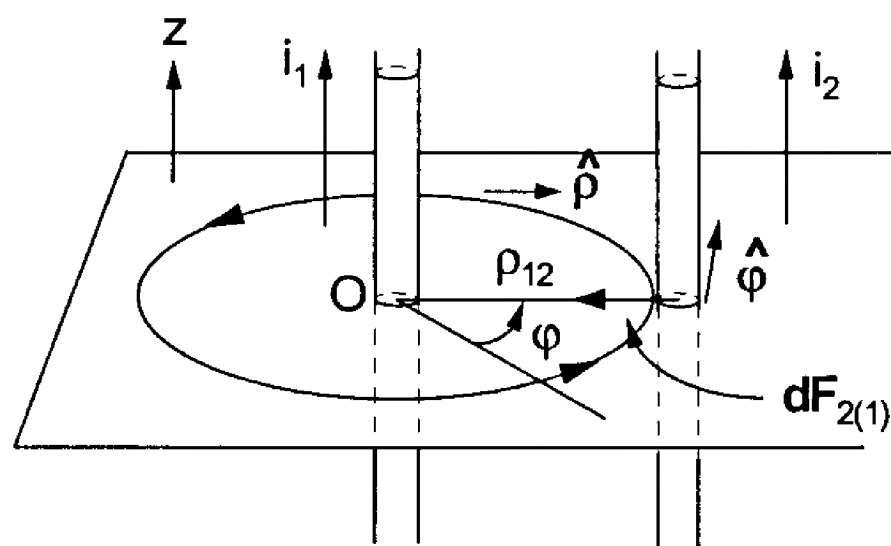


Figura 8.23 Força de uma corrente sobre outra

Consideremos dois fios retilíneos muito longos paralelos, percorridos por correntes estacionárias  $i_1$  e  $i_2$ . Suponhamos primeiro que elas são de mesmo sentido, que adotamos como o de  $Oz$  (fig.), e sejam  $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$  os versores associados a um sistema de coordenadas cilíndricas com origem num dos fios (fig. 8.23), e  $\rho_{12}$  a distância entre os fios.

O campo magnético  $\mathbf{B}_1$  produzido por  $i_1$  num ponto do segundo fio é dado por [cf. (8.1.12)]

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{\rho_{12}} \hat{\phi}$$

A força com que este campo atua sobre um trecho  $d\mathbf{l}_2$  do segundo fio é ( $d\mathbf{l}_2 = dl_2 \hat{z}$ )

$$d\mathbf{F}_{2(1)} = i_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = i_2 dl_2 \cdot \frac{\mu_0 i_1}{2\pi \rho_{12}} \underbrace{\hat{z} \times \hat{\phi}}_{= -\hat{\rho}}$$

o que dá

$$\boxed{\frac{d\mathbf{F}_{2(1)}}{dl_2} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi \rho_{12}} \hat{\rho} = -\frac{d\mathbf{F}_{1(2)}}{dl_1}} \quad (8.3.22)$$

para a força (atrativa) por unidade de comprimento exercida pela corrente retilínea  $i_1$  sobre a corrente paralela  $i_2$ .

A última igualdade (verifique-a!) exprime a 3.<sup>a</sup> lei de Newton.

Se  $i_2$  tivesse sentido inverso ao de  $i_1$  ( $d\mathbf{l}_2 \rightarrow -d\mathbf{l}_2$ ), a força seria repulsiva: *correntes paralelas (mesmo sentido) se atraem; correntes antiparalelas (sentidos opostos) se repelem. A força de interação magnética entre as correntes é proporcional ao produto das intensidades e inversamente proporcional à distância entre elas.*

Podemos agora, finalmente, definir o ampère, unidade básica do SI. Para  $i_1 = i_2 = 1 \text{ A}$ ,  $\rho_{12} = 1 \text{ m}$ , a força por metro tem magnitude  $\mu_0/(2\pi) = 2 \times 10^{-7} \text{ N}$ :

*O ampère é a corrente estacionária que, quando mantida em dois fios retilíneos paralelos muito longos separados por uma distância de 1m, produz entre eles uma força de interação magnética, por metro, de  $2 \times 10^{-7}$  N*

Daí decorre a definição do coulomb como unidade de carga e, através da lei de Coulomb, a possibilidade de determinar experimentalmente o valor de  $\epsilon_0$  por *medidas puramente eletromagnéticas* ( $\mu_0$  é prefixado como  $4\pi \times 10^{-7}$  N / A<sup>2</sup>). Este resultado desempenhará um papel importante no Capítulo 12.

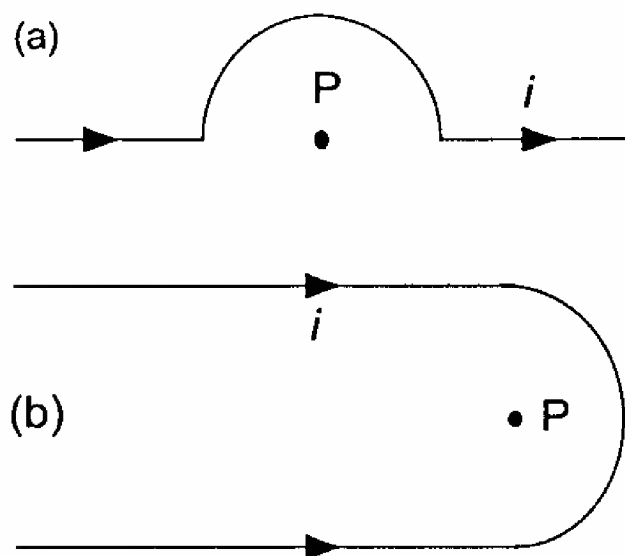
## PROBLEMAS

1. No modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, o raio  $a_0$  da 1.<sup>a</sup> órbita circular do elétron é dado pela condição de quantização  $L = \hbar$ , onde  $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  e  $L$  é a magnitude do momento angular do elétron em relação ao núcleo (próton). (a) Usando essa condição, mostre que  $a_0 = 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 / (m e^2)$ , onde  $m$  e  $e$  são as magnitudes da massa e carga do elétron, respectivamente. Calcule o valor de  $a_0$ . (b) Calcule a intensidade de corrente  $i$  associada ao movimento do elétron na sua órbita. (c) Calcule a magnitude do campo magnético produzido por essa corrente na posição do núcleo. (d) Calcule a magnitude  $\mu_B$  do momento de dipolo magnético associado à corrente (magneton de Bohr), e mostre que  $\mu_B / L = e / (2m)$  (razão giromagnética clássica). Obtenha o valor numérico de  $\mu_B$ .

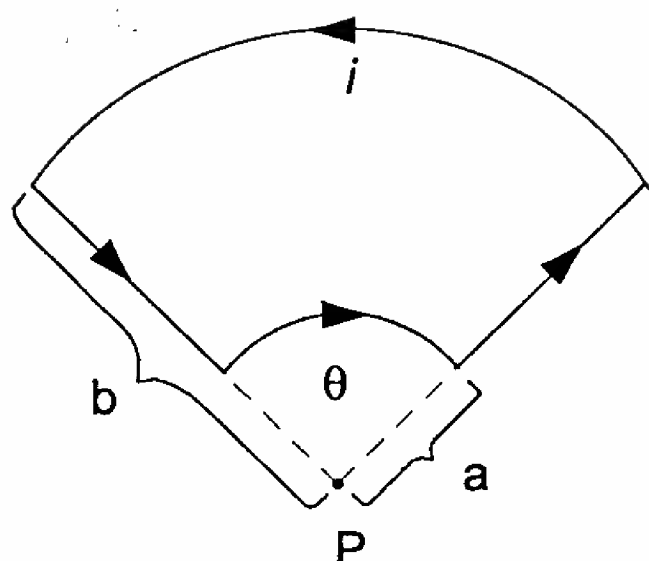
2. Dois fios retilíneos paralelos muito longos (tratados como infinitos), separados por uma distância  $2b$ , transportam correntes de mesma intensidade  $i$ , em sentidos opostos (um é o retorno do outro). Considere um ponto  $P$  qualquer do plano dos dois fios. Sobre a perpendicular aos fios que passa por  $P$ , tome a origem  $O$  a meio caminho entre os fios, e seja  $x$  a abscissa de  $P$  em relação a  $O$ . (a) Calcule a magnitude  $B(x)$  do campo magnético em  $P$ , para  $|x| < b$  (supõe-se que a distância de  $P$  a cada fio é muito maior que o diâmetro do mesmo). (b) Idem para  $|x| > b$ . (c) Trace um gráfico qualitativo de  $B(x)$ .

3. Uma espira em forma de retângulo, de lados  $2a$  e  $2b$ , transporta uma corrente de intensidade  $i$ . (a) Calcule a magnitude do campo magnético no centro do retângulo. (b) Tome o limite do resultado para  $a \gg b$  e discuta a relação com o encontrado no Problema 2.

4. Uma espira quadrada de lado  $L$  é percorrida por uma corrente  $i$ . (a) Determine, em módulo direção e sentido, o campo  $\mathbf{B}(z)$  num ponto  $P$  situado sobre o eixo da espira (reta perpendicular ao seu plano passando pelo centro  $O$  da espira), à distância  $z$  de  $O$ . Para  $z = 0$ , relacione o resultado com o do problema 3. (b) Interprete o resultado obtido para  $z \gg L$ .

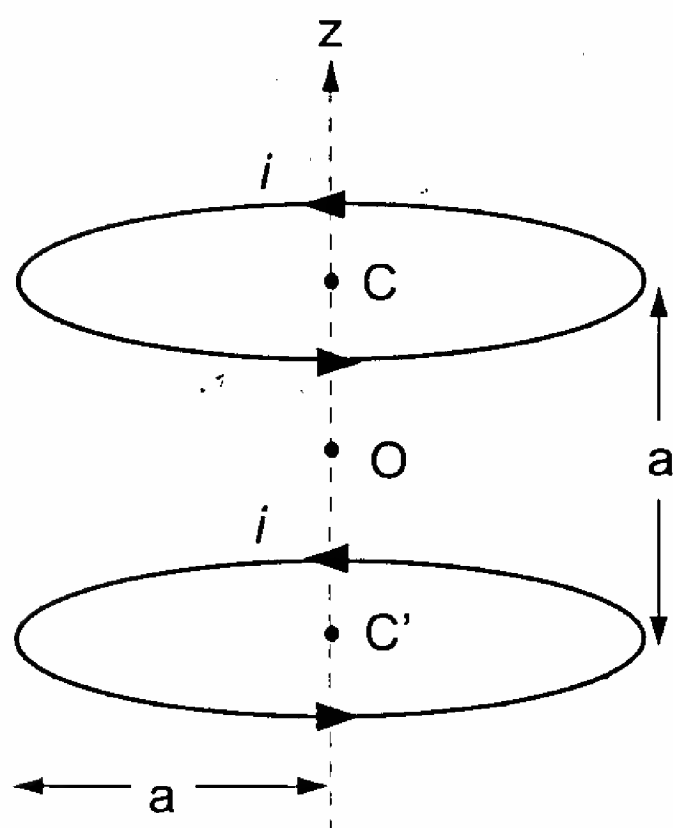
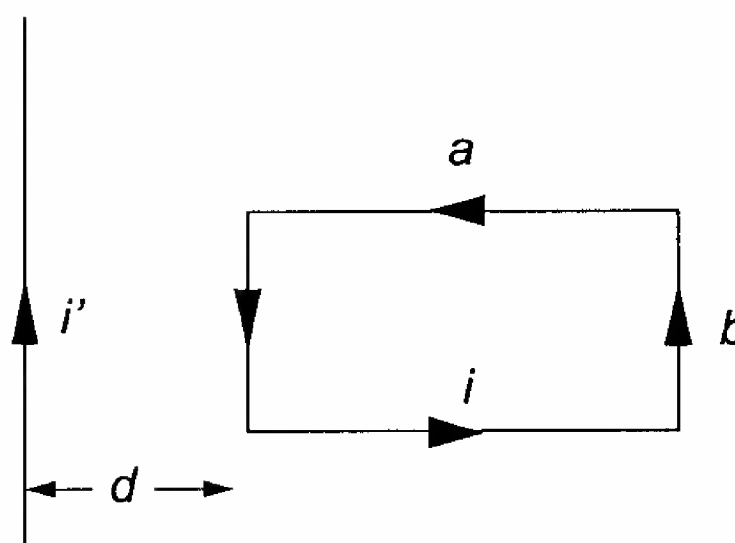


5. Nas figs. (a) e (b), as porções retilíneas dos fios são supostas muito longas e a porção semicircular tem raio  $R$ . A corrente tem intensidade  $i$ . Calcule o campo  $\mathbf{B}$ , em módulo, direção e sentido, no centro  $P$  da porção semicircular, em ambos os casos.



6. O circuito da figura ao lado, formado por dois lados retilíneos e dois arcos de círculo, subtendendo um setor de ângulo  $\theta$ , é percorrido por uma corrente de intensidade  $i$ . Calcule o campo magnético  $\mathbf{B}$  no ponto  $P$  (centro do setor circular).

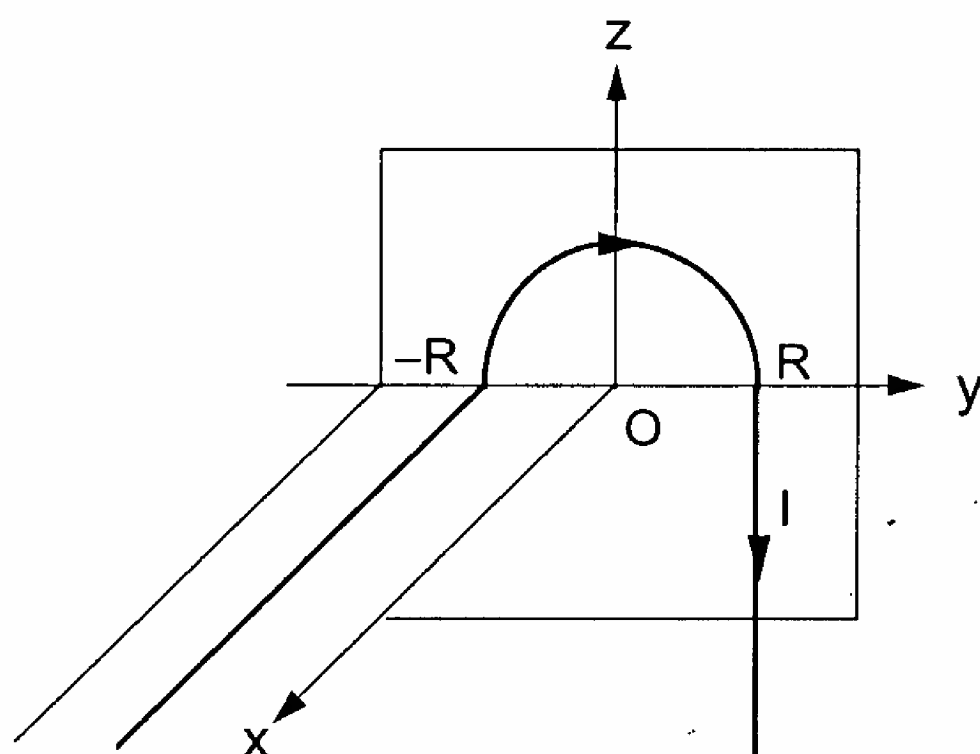
7. A espira retangular da figura, de lados  $a$  e  $b$ , é percorrida por uma corrente  $i$ . Calcule a força  $\mathbf{F}$  exercida sobre ela por um fio retilíneo muito longo, que transporta uma corrente  $i'$ , situado à distância  $d$  da espira (dê módulo, direção e sentido de  $\mathbf{F}$ ).



9. Considere um solenóide finito de raio  $a$  e comprimento  $L$ , com  $n$  espiras por unidade de comprimento, percorrido por uma corrente  $i$ . Tome a origem  $O$  no centro do solenóide, com eixo  $x$  ao longo do eixo de simetria do cilindro. (a) Calcule a magnitude  $B(x)$  do campo magnético num ponto do eixo à distância  $x$  do centro, tanto dentro como fora do solenóide. Quais os valores no centro e nas extremidades? (b) Obtenha e interprete o comportamento de  $B(x)$  para  $x \gg a$ ,  $x \gg L$ . (c) Com  $L = 10a$ , trace um gráfico de  $B(x)/B(0)$  em função de  $x/L$  para  $0 \leq x/L \leq 1,5$ . **Sugestão:** Obtenha o campo do solenóide somando (integrando) o campo das espiras circulares ao longo do eixo.

10. Um disco circular de material isolante, com raio  $R$  e espessura desprezível, está uniformemente carregado com densidade superficial de carga  $\sigma$  e gira em torno do seu eixo, com velocidade angular  $\omega$ . (a) Calcule o campo  $B$  no centro do disco. (b) Calcule o momento de dipolo magnético  $m$  associado à rotação do disco. **Sugestão:** Imagine o disco decomposto em faixas, tratando-as como correntes circulares.

11. (a) Calcule (pela lei de Ampère ou de Biot e Savart) o campo magnético  $B$  devido a uma corrente  $I$  num fio retilíneo infinito, num ponto  $P$  à distância  $R$  do fio. Demonstre, pela lei de Biot e Savart, que a porção do fio à esquerda de  $P$  contribui com  $B/2$ .



(b) Uma corrente contínua de intensidade  $I$  percorre o fio representado na fig., que tem uma porção retilínea muito longa paralela a Oz. Calcule o campo magnético  $B$  produzido por esta corrente no ponto O, centro de semicírculo.

# 9

## A LEI DA INDUÇÃO

○ uso em larga escala da energia elétrica, que revolucionou toda a sociedade industrial, tornou-se possível graças à descoberta, por Faraday, do fenômeno da *indução eletromagnética*.

Michael Faraday (1791-1867), universalmente considerado como um dos maiores experimentadores de todos os tempos, era filho de um ferreiro, um de dez irmãos, e só teve instrução primária. Trabalhou como entregador de jornais e, aos 12 anos, empregou-se como aprendiz de encadernador. Educou-se também lendo os livros que encadernava, em particular a "Enciclopédia Britânica".

Aos 19 anos, ganhou de um freguês entradas para assistir a uma série de conferências de Sir Humphry Davy (que descobriu os elementos sódio e potássio, usando eletrólise) na Royal Institution de Londres. Tomou notas das conferências e entregou um exemplar a Davy. Este, impressionado, nomeou-o como seu assistente de laboratório.

As "Pesquisas Experimentais sobre Eletricidade", que Faraday começou a publicar em 1832, contém inúmeras descobertas fundamentais: eletroquímica, a constante dielétrica, paramagnetismo e diamagnetismo, o "efeito Faraday" em magneto-ótica, e muitas outras. Foi ele quem criou a imagem das linhas de força, que usava constantemente, raciocinando de forma totalmente intuitiva, pois não tinha preparo matemático.

Arago havia mostrado que uma barra de ferro não-imantada se imanta quando nela se enrola um solenóide percorrido por uma corrente elétrica. Ocorreu a mais de um cientista procurar um efeito inverso: usar um ímã permanente para produzir uma corrente numa bobina.

Um físico suíço muito cuidadoso tentou detectar uma tal corrente usando um galvanômetro muito sensível. Para eliminar qualquer perturbação do ímã sobre o galvanômetro, colocou-o numa sala vizinha; depois de inserir o ímã na bobina, ia ler o galvanômetro (ligado à bobina por fios muito longos) na outra sala... e não via nenhum efeito.

Em agosto de 1831, Faraday enrolou ~ 70 m de fio de cobre em torno de um bloco de madeira, inserindo um galvanômetro no circuito. Enrolou outros 70 m, isolados do primeiro, e ligou-os a uma bateria. A princípio, ficou desapontado: uma corrente estacionária no segundo circuito não afetava o galvanômetro, ligado ao primeiro. Faraday notou, porém, que aparecia uma deflexão no galvanômetro quando – e só quando – o outro circuito era *ligado* ou *desligado*. Ou seja: a corrente era induzida pela *variação* do campo magnético devido ao outro circuito. O resultado foi comunicado à Royal Society em 24-11-1831. O físico americano Joseph Henry publicou uma observação semelhante em 1832.

Numa experiência posterior, Faraday aproximou um ímã permanente cilíndrico de um solenóide ligado a um galvanômetro. Quando a barra era introduzida no solenóide, o galvanômetro acusava a passagem de uma corrente. Quando era removida, produzia-se uma corrente em sentido oposto.

Faraday percebeu logo que um efeito análogo se produzia quando o solenóide era aproximado ou afastado do ímã, ficando este em repouso: a indução de corrente dependia apenas do movimento *relativo* entre o ímã e a bobina, resultando numa *variação* do campo magnético que a atravessava.

Foi para encontrar a lei *quantitativa* da indução que Faraday introduziu o conceito de linhas e tubos de força, definindo o que hoje corresponde ao *fluxo* do campo magnético através de um circuito.

## 9.1 A lei da indução

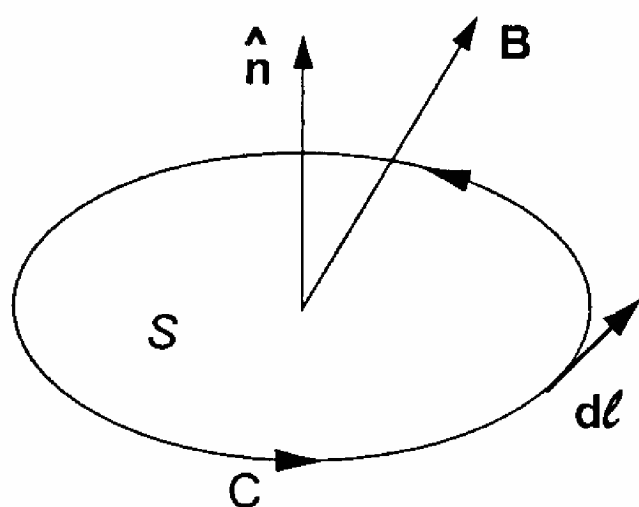


Figura 9.1 Espira num campo B

Consideremos uma única espira  $C$  de fio, imersa num campo magnético  $\mathbf{B}$  e orientada como indicado na fig. 9.1. O *fluxo* de  $\mathbf{B}$  através da espira é

$$\Phi_C = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (9.1.1)$$

onde  $S$  é *qualquer* superfície de contorno  $C$ , orientada (a orientação de  $\hat{\mathbf{n}}$  corresponde à de  $C$ ). O fato de que  $\Phi$  só depende

de  $C$ , e não da escolha de  $S$ , decorre de ser  $\oint_\Sigma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  para qualquer superfície fechada  $\Sigma$ .

Seja  $R$  a resistência da espira  $C$ . A lei de Faraday pode então ser enunciada em termos da *corrente*  $i$  induzida em  $C$  quando  $\Phi_C$  varia com o tempo:

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_C}{dt} \quad (9.1.2)$$

A existência dessa corrente na espira está associada, como sabemos, a uma fem (*força eletromotriz*)  $\mathcal{E}$  dada por

$$\mathcal{E} = Ri = -\frac{d\Phi_C}{dt} \quad (9.1.3)$$

O significado do sinal (–) nessas expressões será discutido na Seq. 9.2. A variação de  $\Phi_C$  com o tempo pode ser devida ao movimento de  $C$  através de um campo  $\mathbf{B}$  constante, ou à variação de  $\mathbf{B}$  com o tempo, o circuito  $C$  permanecendo fixo, ou ainda à deformação do circuito  $C$ . O resultado só depende da *taxa de variação* de  $\Phi_C$  com o tempo, qualquer que seja a origem desta variação. Vamos ver agora que, num desses casos, é possível *deduzir* o resultado a partir da força de Lorentz.

(a) *Circuito C móvel num campo B fixo*

Se o fio se move com velocidade  $\mathbf{v}$  num campo  $\mathbf{B}$  fixo, os elétrons livres, transportados com esta velocidade, ficam sujeitos à *força de Lorentz*; para cada um deles,

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Como essa é uma força de origem não-eletrostática, podemos associar-lhe um "campo elétrico equivalente"  $\mathbf{E}^{(e)}$  (Seq. 6.8), dado, por definição, por

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{E}^{(e)} \quad \left\{ \quad \mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right. \quad (9.1.4)$$

A força eletromotriz correspondente ao longo do circuito  $C$  é então

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}^{(e)} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (9.1.5)$$

Para relacionar essa expressão com a variação de  $\Phi_C$ , consideremos duas posições sucessivas de  $C$ , nos instantes  $t$  e  $t + dt$ . Durante o intervalo de tempo  $dt$ , cada ponto de  $C$  sofre um deslocamento  $\mathbf{v} dt$ .

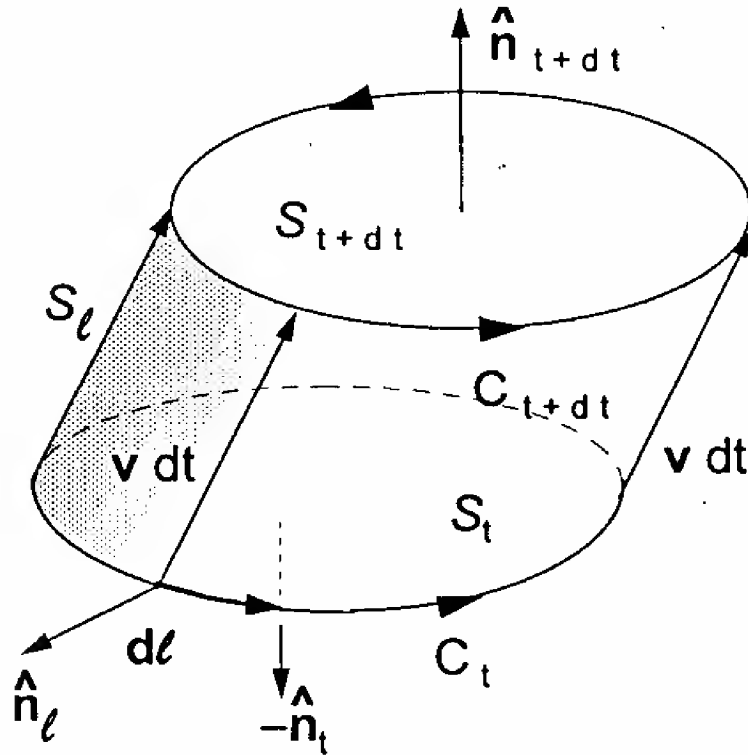


Figura 9.2 Variação do fluxo através de um circuito  $C$  móvel

O produto vetorial

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{v} dt = \hat{\mathbf{n}}_l dS = d\mathbf{S}_l \quad (9.1.6)$$

representa o elemento de área orientado ( $\hat{\mathbf{n}}_l$  = normal externa) da *superfície lateral*  $S_l$  do volume cilíndrico gerado pelo deslocamento de  $C$ ; as bases são as posições  $C_t$  e  $C_{t+dt}$  da espira nos instantes  $t$  e  $t + dt$ , respectivamente, e as normais externas correspondentes são (fig. 9.2)  $-\hat{\mathbf{n}}_t$  e  $+\hat{\mathbf{n}}_{t+dt}$ .

As superfícies das bases,  $S_t$  e  $S_{t+dt}$ , formam, juntamente com  $S_l$ , um



cilindro fechado  $S \equiv S_t + S_{t+dt} + S_l$ , e temos então

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 &= \int_{S_{t+dt}} \mathbf{B} \cdot \underbrace{d\mathbf{S}}_{(\hat{\mathbf{n}}_{t+dt} dS)} + \int_{S_t} \mathbf{B} \cdot \underbrace{d\mathbf{S}}_{(-\hat{\mathbf{n}}_t dS)} + \int_{S_l} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_l \\ &= \Phi_{C_{t+dt}} - \Phi_{C_t} + \int_C \underbrace{d\mathbf{l} \times (\mathbf{v} dt)}_{\hat{\mathbf{n}}_l dS} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

o que dá

$$dt \oint_C \underbrace{(d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B}}_{\substack{= d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ = d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}^{(e)}}} = -(\Phi_{C_{t+dt}} - \Phi_{C_t}) = -d\Phi_C$$

ou seja,

$$\oint_C \mathbf{E}^{(e)} \cdot d\mathbf{l} = \mathfrak{E} = -\frac{d\Phi_C}{dt} \quad (9.1.7)$$

que é a *lei da indução* (forma integral).

(b) Circuito  $C$  fixo e  $\mathbf{B}$  variável

Se o circuito  $C$  permanece fixo e é  $\mathbf{B}$  que varia com o tempo, não há mais força de Lorentz sobre os elétrons, mas a *experiência mostra* que o resultado permanece válido:

$$\mathfrak{E} = -\frac{d}{dt} \Phi_C = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.1.8)$$

onde o último membro (derivada debaixo do sinal de  $\int$ ) resulta de ser  $C$  fixo, e somente  $\mathbf{B}$  variar com  $t$ .

Neste caso, não havendo mais força de Lorentz, a força eletromotriz corresponde a um campo *elétrico*  $\mathbf{E}$ , que não é mais *eletrostático*, devido à variação com o tempo, e adquire assim uma circulação  $\neq 0$  ao longo de uma curva  $C$  fechada:

$$\mathfrak{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Temos, por outro lado, pelo teorema do rotacional,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

Como o resultado vale qualquer que seja o circuito  $C$ , inferimos que

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.1.9)$$

que é a forma *diferencial* da lei da indução de Faraday, e corresponde a uma das *equações de Maxwell*.

A interpretação física desse resultado é: *um campo magnético variável com o tempo produz um campo elétrico* (que não é mais eletrostático).

A existência desse campo elétrico, independentemente de haver um circuito material  $C$ , será ilustrada mais adiante, no exemplo do betatron (Seç. 9.4).

É notável que a mesma lei descreva situações físicas aparentemente tão distintas quanto as duas que acabamos de tratar. Esse fato chamou a atenção de Einstein: logo no primeiro parágrafo de seu célebre trabalho de 1905 "Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento", onde formulou a teoria da relatividade restrita, ele diz:

"É bem conhecido que a eletrodinâmica de Maxwell — como é entendida atualmente — quando aplicada a corpos em movimento, leva a assimetrias que não parecem inerentes aos fenômenos. Consideremos, por exemplo, a ação recíproca de um ímã e um condutor. O fenômeno observável só depende neste caso do movimento relativo entre o condutor e o ímã, mas a descrição usual estabelece uma distinção marcante entre dois casos, conforme um ou outro destes dois corpos se mova. Se o ímã se move e o condutor está em repouso, surge na vizinhança do ímã um campo elétrico com uma energia definida, que produz uma corrente no condutor. Mas, se o ímã estiver parado e o condutor em movimento, não aparece um campo elétrico na vizinhança do ímã. Entretanto, no condutor, aparece uma força eletromotriz, a qual produz — supondo que o movimento relativo é o mesmo nos dois casos — correntes elétricas idênticas às que aparecem no caso anterior".

Considerações desse tipo desempenharam um papel importante na formulação da teoria da relatividade restrita, que será discutida no Vol. 4.

## 9.2 A lei de Lenz

Vamos agora discutir a interpretação do sinal  $(-)$  na lei da indução, que é devida a H. Lenz (1834).

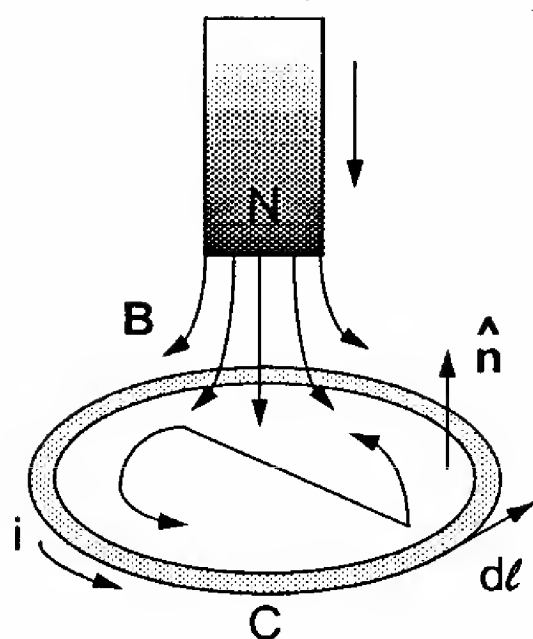


Figura 9.3 Aproximação de um ímã a uma espira

Para isso, consideremos uma espira plana condutora  $C$  orientada, com normal  $\hat{n}$  ao seu plano (fig. 9.3), e suponhamos que se aproxime dela um ímã permanente, com pólo  $N$  voltado para a espira. Como o campo  $B$  do ímã tende a ser antiparalelo a  $\hat{n}$ , temos  $B \cdot \hat{n} < 0$  e o fluxo  $\Phi_C$  do campo do ímã através de  $C$  é  $< 0$ . À medida que o ímã se *aproxima*,  $|\Phi_C|$  aumenta o que, para  $\Phi < 0$ , implica

$$\frac{d\Phi_C}{dt} < 0$$

Devido ao sinal  $(-)$  na lei da indução, isso implica que a fem induzida é *positiva*,

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

ou seja, o campo  $\mathbf{E}$  dentro da espira é tal que  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$ . Logo, a corrente induzida  $i$  terá a orientação de  $d\mathbf{l}$ .

Mas isso equivale, como se vê na fig. 9.3, a criar na espira um dipolo magnético cuja face  $N$  aponta para a face  $N$  do ímã, produzindo portanto uma força magnética de *repulsão* sobre o ímã, que tende a *afastá-lo* da espira, opondo-se ao seu movimento. *O sentido da corrente induzida é aquele que tende a se opor à variação do fluxo* através da espira. Essa é a *lei de Lenz*, que dá a interpretação do sinal  $(-)$ .

Também podemos perceber isso notando que a corrente induzida  $i$  produz seu próprio campo magnético, o qual, como se vê na fig. 9.3, tende a ter a direção e o sentido de  $\hat{n}$ , criando um fluxo magnético *positivo* através de  $C$ , que atua em sentido oposto ao *aumento* do fluxo  $\Phi_C < 0$  devido à aproximação do ímã.

Se o ímã se *afasta* da espira, em lugar de aproximar-se, isto corresponde a  $d\Phi_C / dt > 0$ , e a fem induzida  $\mathcal{E}$  é  $< 0$  neste caso, produzindo uma corrente induzida  $i < 0$  na espira. A face *sul* do dipolo correspondente aponta agora para o ímã, tendendo a *atraí-lo* de volta, ou seja, novamente *opondo-se* à variação do fluxo através de  $C$ .

Note-se que o *campo B* do ímã aponta no mesmo sentido nos dois casos. Assim, a corrente induzida *não* se opõe ao *campo*; opõe-se à *variação* do fluxo.

Pela mesma razão, quando se tem uma corrente circulando num circuito e se *desliga* a corrente por meio de um interruptor, a fem induzida atua no sentido de *manter* a corrente circulando (impedindo a redução do fluxo), e a variação brusca, produzida pelo interruptor, gera uma fem suficientemente elevada para fazer saltar uma faísca, fechando o circuito através do ar. A corrente na espira atua como se tivesse *inércia*, opondo-se à

sua própria variação. Veremos mais adiante como se exprime quantitativamente essa inércia (Seç. 9.5).

A lei de Lenz está diretamente vinculada ao princípio de conservação da energia. Com efeito, se a fem induzida tivesse sinal oposto ao da lei de Lenz, ela tenderia a *favorecer* a variação de fluxo. No exemplo do ímã cuja face norte se aproxima da espira, uma corrente em sentido oposto ao da lei de Lenz criaria uma face *sul* na espira, *atraindo* o ímã para ela e acelerando o seu movimento. Ele *ganharia* energia cinética e ao mesmo tempo *produziria* o calor no efeito Joule através da corrente induzida na espira, violando a conservação da energia.

Para um ímã em queda livre em direção à espira, a conservação da energia exige que a energia dissipada pela corrente induzida em efeito Joule se obtenha à custa de uma *redução* da energia cinética do ímã: o campo magnético da corrente induzida deve tender portanto a *freiar* o ímã, em conformidade com a lei de Lenz.

### Correntes de Foucault

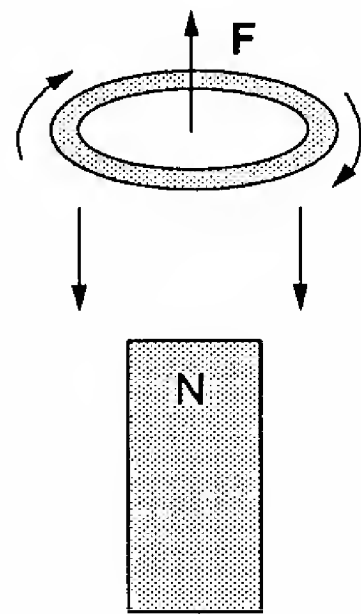


Figura 9.4 Espira condutora caindo sobre um ímã

Se uma espira condutora é solta em queda livre sobre um ímã permanente (fig. 9.4), a corrente  $i$  induzida criará um dipolo magnético que tenderá a ser *repelido* pelo ímã, produzindo, como acima, uma força  $F$  de *freimento* da espira, análoga a uma força de *atrito* viscoso.

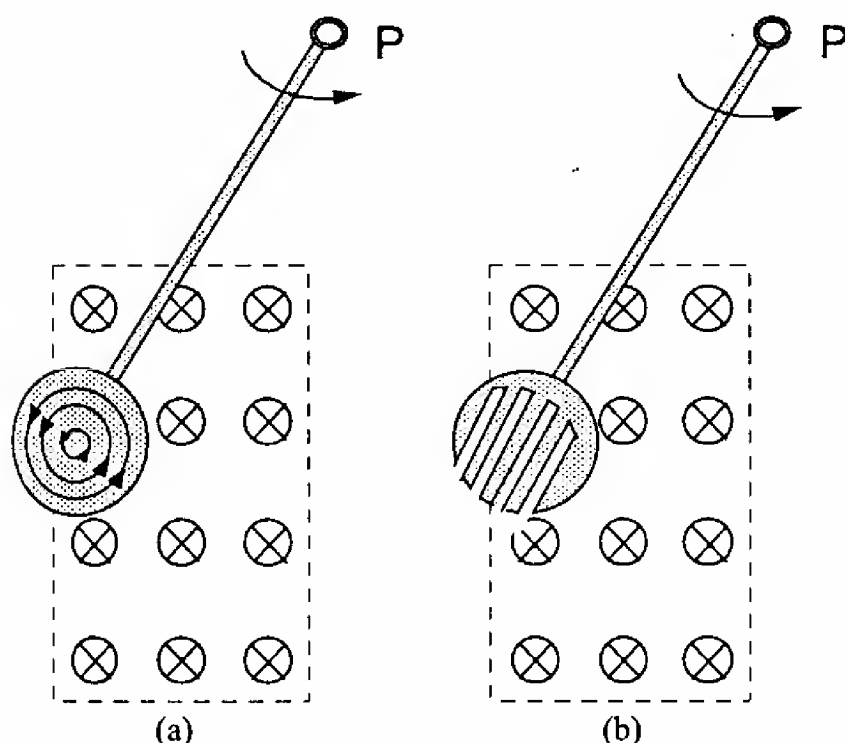


Figura 9.5 Corrente de Foucault

Analogamente, consideremos um pêndulo metálico suspenso de um ponto  $P$ , que, durante sua oscilação, penetra numa região (por exemplo, entre os pólos de um eletroímã) onde existe um campo magnético, perpendicular ao papel e dirigido para baixo (região  $\otimes \otimes$  na figura). A fig. 9.5 (a) mostra que serão induzidas no disco metálico correntes que tendem a se opor à variação do fluxo através dele. Essas *correntes de Foucault* equivalem a uma força de atrito viscoso tendente a freiar o

disco, como se ele estivesse penetrando num fluido viscoso (mel, por exemplo).

Podemos reduzir grandemente esse efeito cortando uma série de fendas no disco do pêndulo, como num pente [Fig. 9.5(b)]. Com efeito, nesse caso, reduzimos muito o fluxo nas partes metálicas, e ao mesmo tempo obrigamos cada corrente a percorrer um caminho mais longo, aumentando a resistência – e diminuindo, correspondentemente, a intensidade das correntes de Foucault induzidas.

Em vários tipos de equipamentos elétricos com partes móveis, as correntes de Foucault constituem um fator de perda de potência, de forma que se procura minimizá-las utilizando artifícios análogos aos da introdução das fendas no exemplo acima (construção *laminada*, com placas isoladas umas das outras).

### Exemplo 1

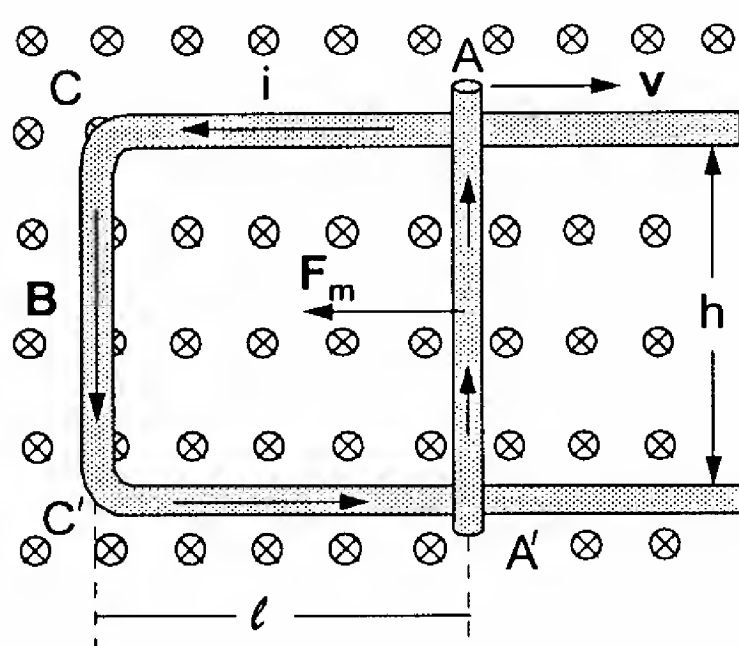


Figura 9.6 Haste metálica móvel sobre trilhos num campo  $B$

Consideremos uma haste metálica  $AA'$  que se desloca sobre trilhos *fixos* em forma de U dentro de um campo  $B$  *uniforme* dirigido perpendicularmente para baixo (fig. 9.6), mantendo bom contato com os trilhos, de modo a formar um circuito condutor fechado  $ACC'A'$  (fig. 9.6). Podemos supor que a haste vertical fixa  $CC'$  dos trilhos tem resistência bem mais elevada do que o resto dele, de modo que a resistência total  $R$  do circuito praticamente não muda no deslocamento, apesar do aumento do comprimento  $l$  dos lados  $CA$  e  $C'A'$  à medida que a haste  $AA'$  se desloca para a direita.

Se a normal  $\hat{n}$  ao plano do circuito é orientada para cima, o fluxo  $\Phi$  do campo através do circuito é negativo, e dado por

$$\Phi = -B l h \quad (9.2.1)$$

onde  $h$  é a largura do trilho. Logo, a fem induzida é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B h \frac{dl}{dt} = B h v \quad (9.2.2)$$

onde  $v$  é a magnitude da velocidade com que a haste móvel  $AA'$  se desloca para a direita.

A corrente induzida  $i$  tem assim o sentido positivo (anti-horário), como indicado na fig. 9.6, e é dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B h v}{R} \quad (9.2.3)$$

A força magnética  $\mathbf{F}_m$  com que o campo  $\mathbf{B}$  atua sobre a haste  $AA'$  tem portanto o sentido indicado na fig. 9.6, oposto a  $\mathbf{v}$ , e é dada por

$$\mathbf{F}_m = i \int_A^{A'} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -ihB \frac{\mathbf{v}}{v} \left\{ \mathbf{F}_m = -\frac{h^2 B^2}{R} \mathbf{v} \right. \quad (9.2.4)$$

que é, conforme previsto acima, uma força de *atrito* resistente, proporcional à velocidade.

Se quisermos manter a haste  $AA'$  em movimento com velocidade  $\mathbf{v}$  constante, temos de puxá-la para a direita, exercendo uma força  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_m$ .

O trabalho realizado por essa força  $\mathbf{F}$  por unidade de tempo (potência mecânica fornecida) é

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{h^2 B^2}{R} v^2 \quad (9.2.5)$$

Por outro lado, a potência *dissipada* pela corrente induzida (efeito Joule) é

$$\mathcal{E}i = Bhv \cdot \frac{Bhv}{R} = \frac{B^2 h^2}{R} v^2 \quad (9.2.6)$$

Vemos portanto que os resultados são consistentes com o princípio de conservação da energia: a potência fornecida pelo trabalho mecânico de puxar a haste é igual à potência dissipada em calor pelo efeito Joule. Isso também concorda com a discussão do sinal na lei de Lenz.

### 9.3 Geradores e motores

No exemplo 1, que acabamos de tratar, a potência mecânica fornecida  $Fv$  é convertida numa corrente elétrica  $i$ , que permanece constante enquanto a haste se desloca com velocidade  $v$  constante, permanecendo dentro do campo uniforme  $B$ . Temos assim um "gerador linear" de corrente contínua – não muito prático, porque deixa de funcionar assim que a haste móvel sai da região onde há campo! Mas já ilustra o princípio básico de um gerador que utiliza a indução eletromagnética.

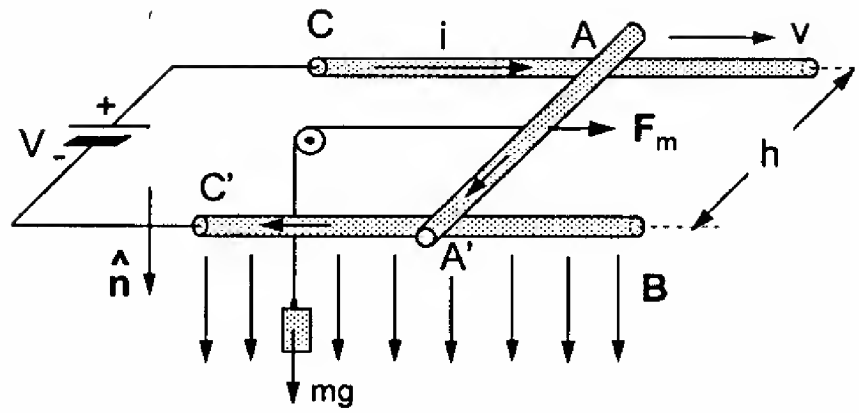


Figura 9.7 Modelo de motor linear

Uma adaptação do mesmo circuito ilustra o princípio básico de um *motor* de indução. Consideremos a situação ilustrada na fig. 9.7, em que uma bateria gera uma diferença de potencial  $V$  entre os trilhos, fazendo passar uma corrente  $i$  em sentido *oposto* ao do Exemplo 1. A força magnética  $F_m$  é então para a *direita*, e é equilibrada pela força peso  $mg$ , transmitida à

haste  $A A'$  através de uma polia, permitindo que  $A A'$  se mova para a direita com velocidade  $v$  constante (que é também a velocidade com que o peso sobe).

Como  $i$  flui em sentido oposto ao do Exemplo 1, a normal  $\hat{n}$  ao plano do circuito tem de ser orientada agora para baixo, de modo que a fem induzida também troca de sinal:

$$\xi = -B h v \quad (9.3.1)$$

Como ela tem sentido oposto à fem  $V$  da bateria, chama-se então uma *força contra-eletrorromotriz*. A intensidade da corrente é

$$i = \frac{V - Bhv}{R} \quad (9.3.2)$$

O que determina a velocidade  $v$ ? A força magnética é equilibrada pela força-peso. Logo,

$$F_m = i h B = \left( \frac{V}{R} - \frac{B h v}{R} \right) h B = mg$$

o que dá

$$\frac{B h v}{R} = \frac{V}{R} - \frac{mg}{h B} \quad \left\{ \quad v = \frac{R}{h B} \left( \frac{V}{R} - \frac{mg}{h B} \right) \right. \quad (9.3.3)$$

Logo,

$$i = \frac{V}{R} - \frac{B h v}{R} = \frac{V}{R} - \left( \frac{V}{R} - \frac{mg}{h B} \right) \quad \left\{ \quad i = \frac{mg}{h B} \right. \quad (9.3.4)$$

A potência elétrica fornecida pela bateria para alimentar o "motor" é  $Vi$ . Parte dela é convertida em energia mecânica, fazendo subir o peso  $mg$  com velocidade  $v$ , e parte é dissipada em calor pelo efeito Joule (potência  $i^2 R$ ). Logo, para que haja conservação de energia, devemos ter: potência elétrica fornecida = potência mecânica gerada + potência dissipada:

$$V_i = mgv + i^2 R$$

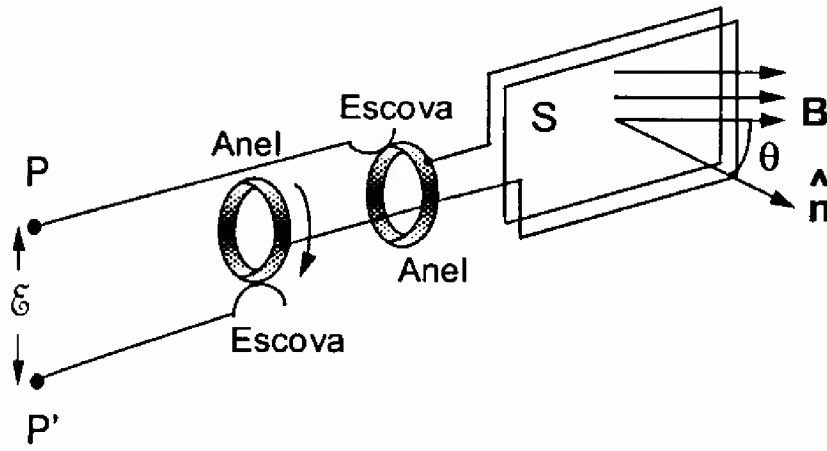
(9.3.5)

Com efeito, temos:

$$\left. \begin{aligned} V_i &= V \frac{mg}{hB} \\ mgv &= mg \frac{V}{hB} - \left( \frac{mg}{hB} \right)^2 R \\ i^2 R &= \left( \frac{mg}{hB} \right)^2 R \end{aligned} \right\} mgv + i^2 R = \frac{mgV}{hB} = V_i$$

Esse é um balanço de energia típico de um motor.

### Geração de corrente alternada



O "quadro", de área  $S$  (normal orientada  $\hat{n}$ ) é formado de  $N$  espiras (na fig. 9.8,  $N = 2$ ), e é feito girar dentro de um campo magnético  $\mathbf{B}$  uniforme (por exemplo, entre os pólos de um eletroímã), com velocidade angular constante  $\omega$ , de modo que o ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{B}$  e a normal  $\hat{n}$  ao quadro é dado por

Figura 9.8 Modelo gerador de corrente alternada

$$\theta = \omega t \quad (9.3.6)$$

O fluxo através das espiras é

$$\Phi = N \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = N B S \cos\theta = N B S \cos(\omega t) \quad (9.3.7)$$

A fem induzida é portanto

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega N B S \sin(\omega t) \quad (9.3.8)$$

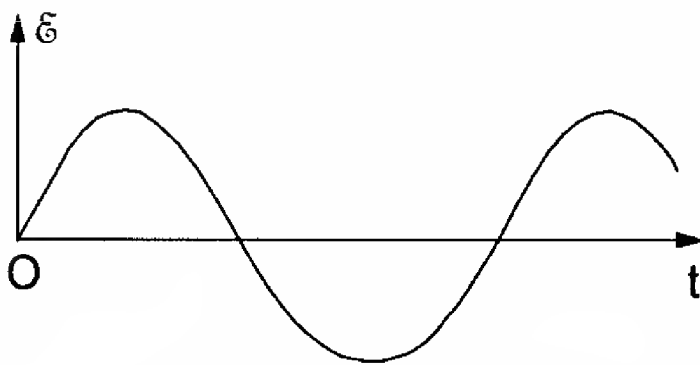


Figura 9.9 Força eletromotriz alternada

que é uma fem *alternada* (fig. 9.9). Ela é "coletada" pelas escovas em contato com os anéis girantes, solidários com as extremidades do quadro (veja a fig. 9.8), e aparece entre os pontos  $P$  e  $P'$ , que podem ser ligados a uma "carga" externa, completando o circuito.



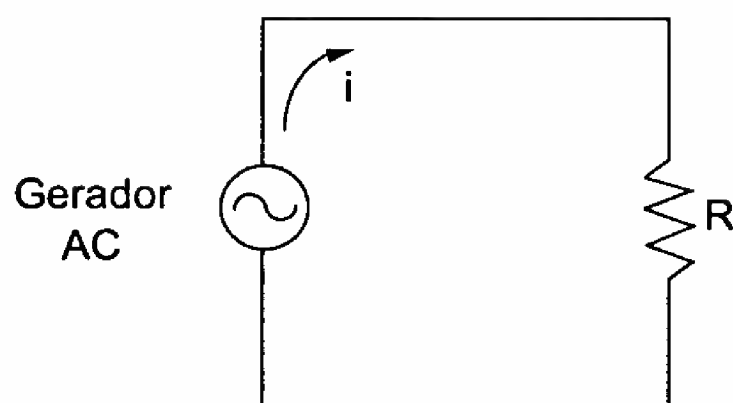


Figura 9.10 Gerador com resistência externa

Se a resistência externa é  $R$  (fig. 9.10), a corrente  $i$  será

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega NBS}{R} \sin(\omega t) \quad (9.3.9)$$

Mas já vimos que, nesse caso, o quadro se comportará como um dipolo magnético de momento

$$\mathbf{m} = i S N \hat{\mathbf{n}} \quad (9.3.10)$$

e ficará sujeito a um torque de magnitude

$$\tau = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = i S N B \sin\theta = i S N B \sin(\omega t) \quad (9.3.11)$$

Para que o quadro permaneça girando com velocidade angular constante  $\omega$ , é preciso fornecer-lhe uma *potência mecânica*

$$\frac{dW}{dt} = \omega \tau = i \omega S N B \sin(\omega t) \quad (9.3.12)$$

Vemos portanto que

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E} i \quad (9.3.13)$$

onde o segundo membro representa a *potência elétrica gerada* (desprezamos o atrito e a potência necessária para produzir  $\mathbf{B}$ ). Assim, a potência mecânica fornecida é convertida em potência elétrica. Em Itaipu, a potência mecânica é devida à queda da água represada, que faz girar as "armaduras" dos geradores.

## 9.4 O betatron

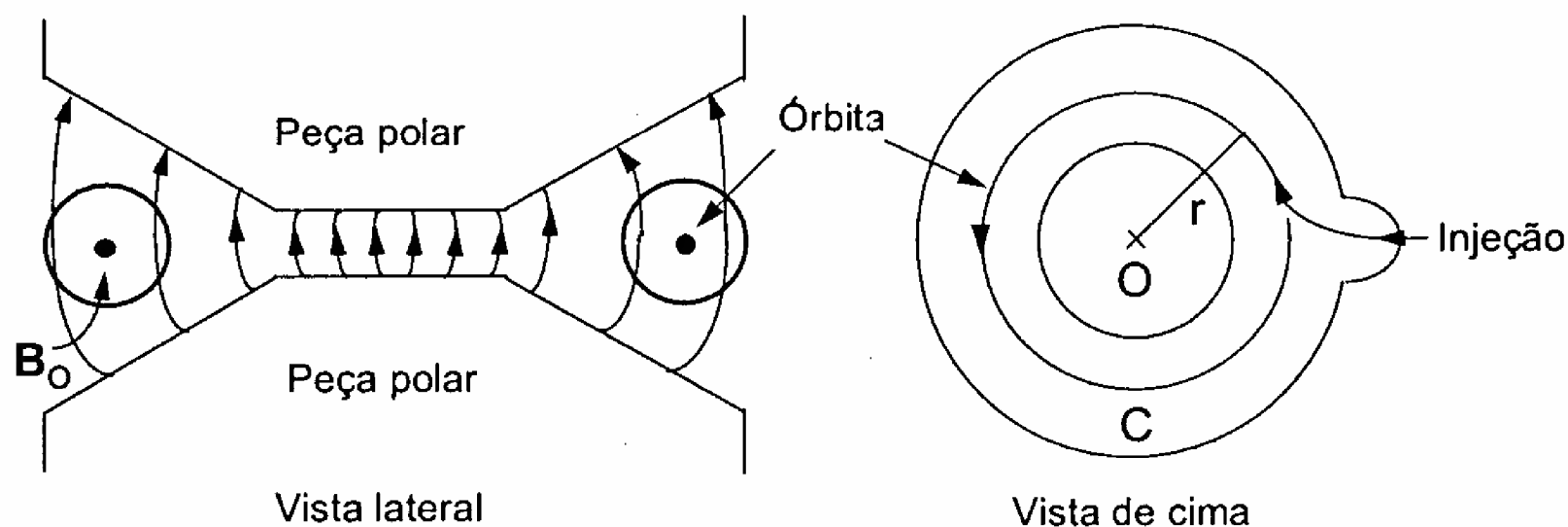


Figura 9.11 Esquema de um betatron

O bétatron é um acelerador de elétrons, em que eles descrevem órbitas circulares sob a ação de um campo magnético, mantendo o raio  $r$  da órbita *fixo* e acelerando-se constantemente, devido à variação de  $\mathbf{B}$  com o tempo (fig. 9.11).

O elétrons circulam dentro de uma câmara toroidal em alto vácuo. O campo magnético é gerado por um eletroímã cujo enrolamento (bobinas) é percorrido por uma corrente alternada, e as peças polares produzem um campo inhomogêneo, mais intenso na parte central do que lateralmente, mas com *simetria axial*.

Se  $B_o$  é o campo sobre a órbita, tratado como uniforme, sabemos que o raio  $r$  é dado pela (7.17):

$$r = \frac{p}{e B_o} \quad \left\{ \quad p = e B_o r \right. \quad (9.4.1)$$

onde  $p$  é a magnitude do momento do elétron e  $e$  a magnitude da sua carga. Pode-se mostrar que este resultado vale mesmo para velocidades relativísticas (que são usualmente atingidas no bétatron).

Como  $\mathbf{B}$  varia com a distância ao eixo, definimos o *valor médio*  $B_m$  de  $B$  sobre a área  $S$  da órbita por

$$B_m \equiv \frac{1}{\pi r^2} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\Phi_C}{\pi r^2} \quad (9.4.2)$$

onde  $\Phi_C$  é o fluxo magnético que atravessa a órbita.

Pela lei da indução, a força eletromotriz ao longo da órbita  $C$  é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_C}{dt} = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B_m) = -\pi r^2 \frac{dB_m}{dt} \quad (9.4.3)$$

e

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E \quad (9.4.4)$$

pois  $|\mathbf{E}| = \text{constante}$  ao longo da órbita, por simetria.

A força tangencial sobre um elétron (que o acelera) é

$$F = -eE = -\frac{e\mathcal{E}}{2\pi r} = \frac{er}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad (9.4.5)$$

e dá (também relativisticamente) a taxa de variação do momento  $p$  do elétron:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{er}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad (9.4.6)$$

Mas, como vimos,

$$p = e B_o r \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = e r \frac{dB_o}{dt} \end{array} \right. \quad (9.4.7)$$

Para que as (9.4.6) e (9.4.7) sejam compatíveis, devemos ter

$$\boxed{B_o = \frac{1}{2} B_m} \quad (9.4.8)$$

ou seja, o campo *sobre a órbita* deve ser a *metade* do seu *valor médio* sobre a área  $S$  da órbita. É para satisfazer a essa condição que as peças polares têm de ser projetadas com a forma indicada aproximadamente na fig. 9.11<sup>\*</sup>

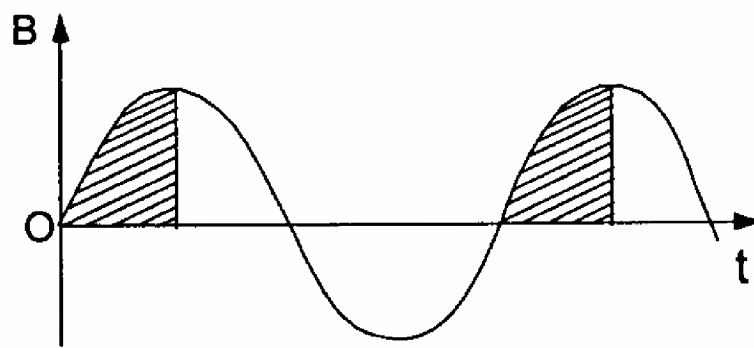


Figura 9.12 Campo  $B$  como função do tempo

Para que os elétrons sejam acelerados,

$$\frac{dp}{dt} > 0$$

é preciso que seja

$$\frac{dB_o}{dt} > 0$$

além de  $B_o > 0$  (para que a órbita seja descrita num dado sentido).

O campo  $B$ , como a corrente nas bobinas do eletroímã, é alternado, tendo uma variação sinusoidal com o tempo  $t$ . Logo, só é aproveitado para aceleração 1 / 4 de cada ciclo (regiões hachuradas na fig. 9.12). Os elétrons são injetados a cada ciclo.

Ao fim do período de aceleração, injeta-se um pulso de corrente, que expande a órbita e leva os elétrons a colidir com um alvo, emitindo raios X de energia elevada, para utilização em física nuclear ou física médica. A energia final dos elétrons pode atingir algumas centenas de MeV. Para energias mais altas, a perda de energia dos elétrons por emissão de radiação eletromagnética não permite mais usar esse processo de aceleração; utilizam-se aceleradores de outro tipo, os síncrotrons.

\* Além disto, é preciso garantir a *estabilidade* da órbita.

## 9.5 Indutância mútua e auto-indutância

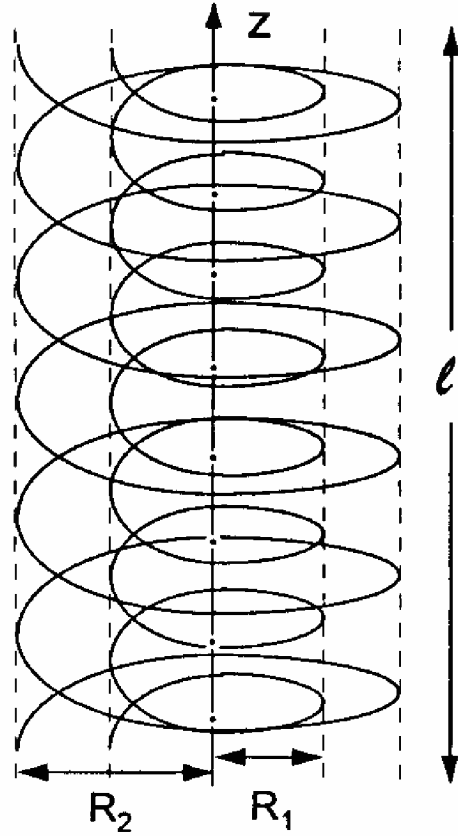


Figura 9.13 Indutância mútua entre dois solenóides

Uma das experiências de Faraday consistiu em induzir uma corrente numa bobina fazendo variar a corrente em outra bobina: o fluxo magnético assim produzido atua sobre a outra e sua variação gera a corrente.

Consideremos dois solenóides coaxiais muito longos, de mesmo comprimento  $l$ , um de raio  $R_1$  e  $N_1$  espiras, e o outro de raio  $R_2 > R_1$  e  $N_2$  espiras (fig. 9.13).

Se fizermos passar uma corrente  $i_1$  estacionária pelo solenóide 1 (de raio  $R_1$ ), o campo  $\mathbf{B}_1$  que ela produz é dado por (longe das extremidades do solenóide)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 \hat{\mathbf{z}} \quad (0 \leq r \leq R_1) \\ &= 0 \quad (r > R_1) \end{aligned} \quad (9.5.1)$$

O fluxo  $\Phi_{2(1)}$  produzido por  $\mathbf{B}_1$  sobre as  $N_2$  espiras do solenóide 2 (não-nulo apenas dentro de 1) é

$$\Phi_{2(1)} = N_2 \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = N_2 B_1 \cdot (\pi R_1^2) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} (\pi R_1^2) i_1$$

que é proporcional a  $i_1$ :

$$\Phi_{2(1)} \equiv L_{21} i_1 \quad (9.5.2)$$

onde a constante de proporcionalidade (ou seja, o fluxo induzido por unidade de corrente indutora)

$$L_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{(\pi R_1^2)}{l} \quad (9.5.3)$$

chama-se *indutância mútua*. Como  $\Phi$  se mede em webers e  $i$  em ampères, a unidade de indutância é o *Henry*, definido por

$$1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} \equiv 1\text{H} \quad (9.5.4)$$

Analogamente, se fizermos passar uma corrente estacionária  $i_2$  pelo solenóide 2, ela produz um campo

$$\begin{aligned} B_2 &= \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2 \hat{z} \quad (0 \leq r \leq R_2) \\ &= 0 \quad (r > R_2) \end{aligned} \quad (9.5.5)$$

e o fluxo  $\Phi_{1(2)}$  deste campo através das  $N_1$  espiras do solenóide 1 é

$$\Phi_{1(2)} = N_1 \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = N_1 B_2 \cdot (\pi R_1^2) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} (\pi R_1^2) i_2$$

o que dá

$$\Phi_{1(2)} \equiv L_{12} i_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} (\pi R_1^2) i_2 \quad (9.5.6)$$

onde

$$L_{12} = L_{21} \quad (9.5.7)$$

justificando o nome de indutância *mútua* (note que  $L_{12}$  não se obtém pela substituição  $1 \leftrightarrow 2$  na expressão de  $L_{21}$ !).

Além de produzir um fluxo magnético no solenóide 2, a corrente  $i_1$  também produz um fluxo  $\Phi_{1(1)}$  no próprio solenóide 1:

$$\Phi_{1(1)} = N_1 \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = N_1 B_1 \cdot (\pi R_1^2) = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} \pi R_1^2 i_1$$

ou seja,

$$\Phi_{1(1)} \equiv L_1 i_1 \quad (9.5.8)$$

onde

$$L_1 \equiv L_{11} = \mu_0 \frac{(N_1)^2}{l} \pi (R_1)^2 \quad (9.5.9)$$

chama-se *auto-indutância* do solenóide 1 ( $S_1$  = área de secção).  $L_1$  varia com  $(N_1)^2$  porque o fluxo sobre *cada* espira é proporcional a  $N_1 i_1$ , e o fluxo total no solenóide também é proporcional ao seu número de espiras  $N_1$ .

Analogamente, a corrente  $i_2$  produz um fluxo  $\Phi_{2(2)}$  no solenóide 2 por onde ela passa, dado por

$$\Phi_{2(2)} = N_2 \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = N_2 B_2 \cdot (\pi R_2^2) = \mu_0 \frac{(N_2)^2}{l} \pi (R_2)^2 i_2$$

o que dá

$$\Phi_{2(2)} \equiv L_2 i_2 \quad (9.5.10)$$

onde

$$L_2 = \mu_0 \frac{(N_2)^2}{l} \pi (R_2)^2 \quad (9.5.11)$$

é a auto-indutância do solenóide 2. Note que as auto-indutâncias e a indutância mútua são dadas por fatores puramente *geométricos*.

Se passa simultaneamente uma corrente  $i_1$  pelo solenóide 1 e  $i_2$  pelo solenóide 2, os fluxos magnéticos correspondentes através dos dois solenóides serão

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 i_1 + L_{12} i_2 \\ \Phi_2 &= L_{21} i_1 + L_2 i_2 \end{aligned} \quad (9.5.12)$$

onde  $L_{21} = L_{12}$ .

As expressões acima dão

$$L_1 L_2 = \mu_0^2 \frac{(N_1 N_2)^2}{l^2} \pi^2 (R_1 R_2)^2 \left\{ \sqrt{L_1 L_2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_1 R_2 \right.$$

ou seja,

$$\frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{R_1}{R_2} \quad (9.5.13)$$

que é  $< 1$ , e tenderia a 1 no limite  $R_1 \rightarrow R_2$ , mas somente se *todo* o fluxo fosse concatenado.

### Correntes quase-estacionárias

As expressões dos campos magnéticos de solenóides empregadas acima foram obtidas quando eles são percorridos por correntes *estacionárias*. Entretanto, é de se esperar que elas permaneçam válidas para correntes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  *variáveis com o tempo*, ou seja que  $\Phi_1(t)$  e  $\Phi_2(t)$  se obtenham simplesmente substituindo os valores de  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  *no mesmo instante t*, desde que a variação de  $i_1$  e  $i_2$  com o tempo seja *suficientemente lenta*. Que significa isso?

Veremos que, como consequência das equações de Maxwell, as interações eletromagnéticas *não* são instantâneas (como nas teorias de ação à distância), mas se propagam com velocidade finita, que é igual a  $c$ , a velocidade da luz no vácuo. Logo, dizer que a variação das correntes é *lenta* significa que elas *variam muito pouco durante o*

*tempo que a luz leva para atravessar as dimensões típicas dos circuitos considerados.* Por exemplo, para correntes AC de 60 ciclos, o tempo característico de variação das correntes é

$$\sim \frac{1}{60} \text{ s}$$

ao passo que a luz leva

$$\sim \frac{l}{3} \times 10^{-8} \text{ s}$$

para percorrer uma distância de  $l$  metros. Para circuitos de dimensões  $l$  típicas, vemos que a aproximação de *correntes quase-estacionárias*, em que substituímos as correntes pelos seus valores instantâneos, é excelente (mas não para microondas, onde o período é  $\sim l/c$ !).

Podemos então concluir da lei da indução que, se  $i_2(t)$  é a corrente variável num circuito 2, a fem  $\mathcal{E}_1$  induzida por essa variação num circuito 1 será

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \Phi_{1(2)} = -L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (9.5.14)$$

onde  $L_{12}$  é a indutância mútua entre os dois circuitos. Analogamente, se  $i_1(t)$  é a corrente em 1, a fem induzida  $\mathcal{E}_2$  em 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt} \Phi_{2(1)} = -L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (9.5.15)$$

O resultado encontrado acima para o exemplo dos dois solenóides é *geral*:

$$L_{12} = L_{21} \quad (9.5.16)$$

Isso está longe de ser óbvio para dois circuitos quaisquer, mas não poderemos dar a demonstração (ela decorre da introdução do *potencial vetor* magnético, que não foi discutido).

Analogamente, a variação de  $i_1$  com  $t$  produz uma fem *auto-induzida* no circuito 1 dada por

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (9.5.17)$$

e, correspondentemente,

$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (9.5.18)$$

Costuma-se convencionar que *uma fem é positiva quando tem o mesmo sentido que a corrente* no circuito onde atua, ou seja, tem a orientação de  $d\mathbf{l}$  [cf. (9.2.3) e (9.3.1)]. Como as fem da lei de Faraday se *opõem* à variação da corrente,

$$\frac{di}{dt} > 0$$

deve implicar  $\mathcal{E} < 0$ ; logo, as *auto-indutâncias*, como  $L_1$  e  $L_2$ , são sempre *positivas* de acordo com esta convenção. Já para  $L_{12}$ , seu sinal depende das convenções adotadas para os sinais  $i_1$  e  $i_2$  da corrente nos dois circuitos, de forma que  $L_{12}$  pode ser positivo ou negativo.

Se tivermos correntes variáveis em dois circuitos, as fem induzidas serão então

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 &= -L_{21} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}\end{aligned}\tag{9.5.19}$$

Os resultados obtidos para  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_{12}$  no exemplo dos dois solenóides foram todos da forma  $L = \mu_0 l$ , onde  $l$  é um fator geométrico com dimensões de comprimento. Logo, a unidade de  $\mu_0$  também é equivalente a Henry/metro:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H / m}\tag{9.5.20}$$

### Exemplo 2 Auto-indutância de um cabo coaxial

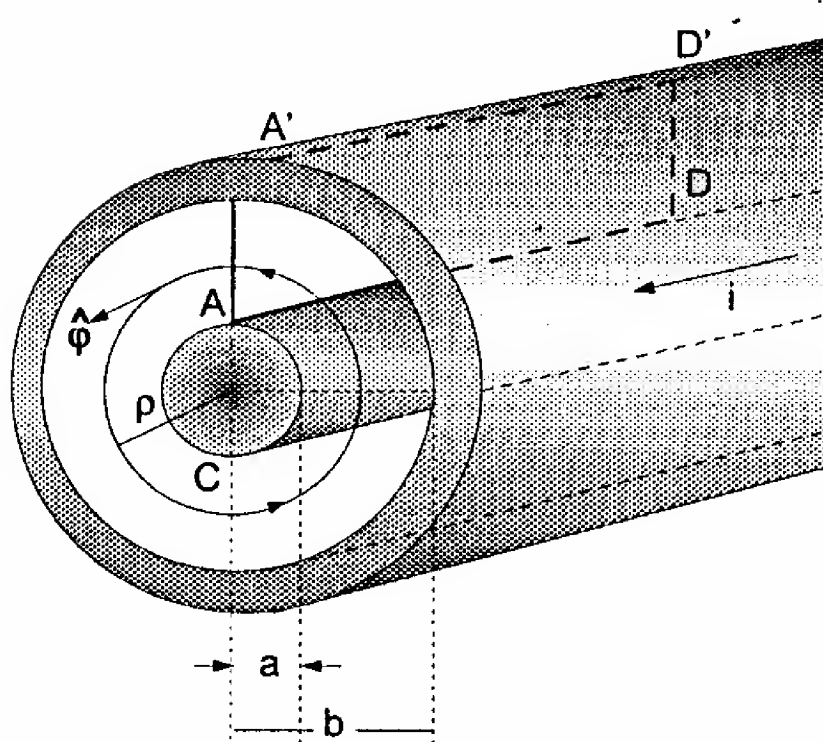


Figura 9.14 Cabo coaxial

Um cabo coaxial é constituído por um fio condutor cilíndrico de raio  $a$  envolvido por uma capa cilíndrica condutora de raio  $b$  (separados por um isolante, onde podemos calcular  $\mathbf{B}$  como no vácuo). Uma corrente de intensidade  $i$  é transmitida axialmente ao longo do condutor interno (aponta para fora, na fig. 9.14) e retorna pelo externo.

Por simetria, as linhas de força de  $\mathbf{B}$  são círculos concêntricos, orientados como  $C$  na fig. 9.14, e  $|\mathbf{B}|$  é constante ao longo de  $C$ . Assim, pela lei de Ampère,



$$2\pi\rho B = \mu_0 i \quad \left\{ \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\phi} \right. \quad (9.5.21)$$

onde  $\hat{\phi}$  é um vetor unitário tangente ao círculo.

Supondo  $a \ll b$ , podemos desprezar o fluxo contido no fio interno. O fluxo de  $\mathbf{B}$  através de um retângulo  $ADD'A'$  de comprimento  $\overline{AD}$  unitário e lado  $AA'$  ligando o condutor interno ao externo (fig. 9.14) é

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\phi} dS = \underbrace{\overline{AD}}_{=1} \cdot \int_a^b B(\rho) d\rho = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

ou seja, o fluxo por unidade de comprimento é

$$\Phi = \mathcal{L} i \quad (9.5.22)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (9.5.23)$$

é a *auto-indutância do cabo coaxial por unidade de comprimento*.

### Exemplo 3 Bobina toroidal

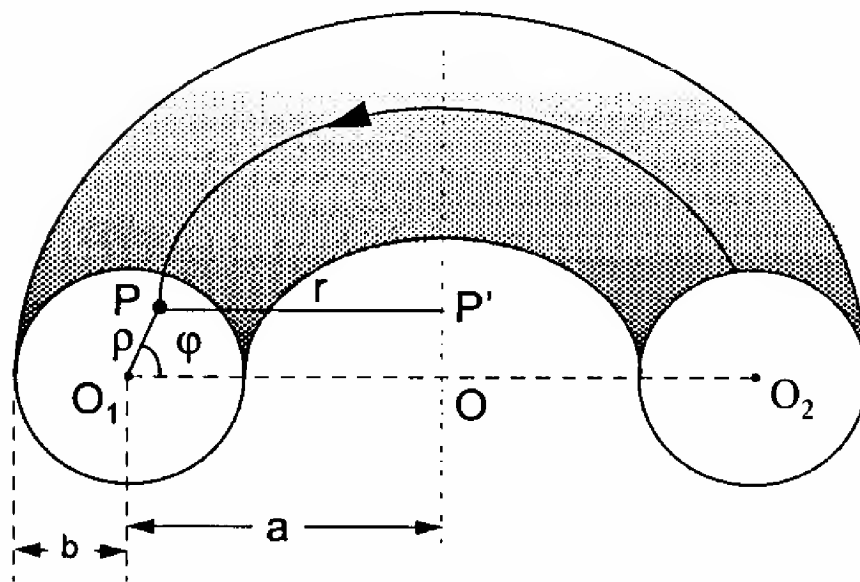


Figura 9.15 Bobina toroidal

Consideremos uma bobina toroidal de  $N$  espiras; o toróide tem raio médio  $\overline{OO_1} = a$  (fig. 9.15) e raio da secção circular  $= b$ . Seja  $P$ , de coordenadas polares  $\overline{O_1P} = \rho$  e  $\phi$ , um ponto da secção transversal. A linha de força que passa por  $P$  é um círculo de raio  $r = \overline{PP'}$  (distância ao eixo de revolução), com

$$r = a - \rho \cos \phi \quad (9.5.24)$$

e a lei de Ampère dá, neste ponto,

$$2\pi r B = N\mu_0 i \quad (9.5.25)$$

onde  $N$  é o número de espiras da bobina enrolada no toróide e  $i$  a intensidade da corrente que a atravessa. Logo,

$$\boxed{\mathbf{B}(\rho, \varphi) = \frac{N \mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{(a - \rho \cos \varphi)} \hat{\mathbf{n}}} \quad (9.5.26)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor da normal ao plano da secção.

O fluxo através de *uma* espira (secção transversal) é portanto

$$\Phi_1 = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{N \mu_0 i}{2\pi} \int_0^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - \rho \cos \varphi}$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a - \rho \cos \varphi)} &= 2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a - \rho \cos \varphi)} = \frac{4}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \underbrace{\left[ \operatorname{tg}^{-1} \left\langle \sqrt{\frac{a-\rho}{a+\rho}} \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right\rangle \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}}_{=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\Phi_1 = N \mu_0 i \cdot \int_0^b \frac{\rho d\rho}{(a^2 - \rho^2)^{1/2}} = N \mu_0 i \underbrace{\left( a^2 - \rho^2 \right)^{1/2} \Big|_b^0}_{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

ou seja, finalmente,

$$\boxed{\Phi_1 = N \mu_0 i \left[ a - \sqrt{a^2 - b^2} \right]} \quad (9.5.27)$$

Se houver uma segunda bobina com  $N'$  espiras enrolada no toróide, o fluxo produzido pela 1.<sup>a</sup> na 2.<sup>a</sup> é então  $N' \Phi_1$ , o que dá (substituindo  $N \rightarrow N_1$ ,  $N' \rightarrow N_2$ )

$$\boxed{L_{12} = \mu_0 N_1 N_2 \left( a - \sqrt{a^2 - b^2} \right)} \quad (9.5.28)$$

para a *indutância mútua* entre duas bobinas enroladas no mesmo toróide. Analogamente, a *auto-indutância* de uma bobina toroidal de  $N$  espiras é

$$\boxed{L = \mu_0 N^2 \left( a - \sqrt{a^2 - b^2} \right)} \quad (9.5.29)$$

Se o raio  $b$  da secção circular é muito menor que o raio médio  $a$  do toróide, podemos usar uma expansão em série de Taylor:

$$(1 - \varepsilon)^{1/2} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

para  $|\varepsilon| \ll 1$ :

$$\sqrt{a^2 - b^2} = (a^2 - b^2)^{1/2} = a \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2} \approx a \left(1 - \frac{b^2}{2a^2}\right) = a - \frac{b^2}{2a}$$

o que dá

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} \approx \frac{b^2}{2a} \quad (b \ll a)$$

resultando em

$$L_{12} \approx \mu_0 N_1 N_2 \frac{b^2}{2a} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{\pi b^2}{2\pi a} \quad (9.5.30)$$

e

$$L \approx \mu_0 N^2 \frac{S}{l} \quad (9.5.31)$$

onde  $S = \pi b^2$  é a área da secção e  $l = 2\pi a$  o comprimento médio do toróide, que coincidem com os resultados obtidos anteriormente para solenóides longos cilíndricos de secção transversal  $S$  e comprimento  $l$ , quando tomados com o mesmo raio ( $R_1 = R_2$ ).

## 9.6 Energia magnética

Vimos que a força eletromotriz induzida  $\mathcal{E}$  num circuito por um campo magnético variável tende a se *opor* à variação do fluxo:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Se a corrente no instante considerado é  $i$ , a *potência* que precisa ser *fornecida* para isso é

$$\left| \frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}i = +\frac{d\Phi}{dt}i = +Li\frac{di}{dt} \right| \quad (9.6.1)$$

onde  $L$  é a auto-indutância do circuito.

Ignorando a perda por efeito Joule (supondo desprezível a resistência do circuito), a energia total que precisa ser fornecida para fazer passar a corrente no circuito do valor 0, para  $t = 0$ , ao valor final  $I$ , em  $t$ , é

$$U = \int_0^t \frac{dW}{dt} dt = \int_0^t Li \frac{di}{dt} dt = L \int_0^I i di = L \frac{i^2}{2} \Big|_0^I = L \frac{I^2}{2}$$

ou seja

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \quad (9.6.2)$$

é a *energia armazenada num circuito de auto-indutância  $L$  que é atravessado por uma corrente  $I$* .

Se tivermos *dois* circuitos, podemos de início produzir a corrente  $I_1$  num deles (com corrente = 0 no outro), o que armazena a energia

$$U_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (9.6.3)$$

Depois disso, para elevarmos a corrente no circuito 2 de 0 para  $I_2$ , temos de fornecer a energia

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dW}{dt} dt &= \int i_2 \frac{d\Phi_2}{dt} dt + \int I_1 \frac{d\Phi_{1(2)}}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \\ &+ L_{12} I_1 I_2 \end{aligned} \quad (9.6.4)$$

onde usamos  $\Phi_{1(2)} = L_{12} i_2$ .

As (9.6.3) e (9.6.4) dão para a energia total

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 \quad (9.6.5)$$

Considerado, por exemplo, como função de  $I_1$ , esse trinômio do 2.<sup>o</sup> grau tem de ser *sempre positivo*, quaisquer que sejam os sinais e valores de  $I_1$  e  $I_2$ . Isso só é possível se o discriminante do trinômio é  $< 0$ :

$$(L_{12} I_2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} L_1 \cdot \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = (I_2)^2 \left[ (L_{12})^2 - L_1 L_2 \right] < 0$$

ou seja, devemos ter sempre

$$|L_{12}| < \sqrt{L_1 L_2} \quad \left\{ \quad 0 \leq k \equiv \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1 \quad (9.6.6) \right.$$

onde  $k$  se chama o *coeficiente de acoplamento indutivo*. Se  $k$  é próximo de 1, o acoplamento magnético entre os dois circuitos é forte; quanto menor for  $k$ , menos eles estão

acoplados (por exemplo, se estão muito longe um do outro). Também na (9.5.13) vimos que  $k = R_1/R_2 < 1$ , e  $k \rightarrow 1$  para  $R_1 \rightarrow R_2$ , quando *todo* o fluxo de um dos solenóides atravessa o outro, sem qualquer perda (o que na prática não é realizável).

### Densidade de energia magnética

Para um solenóide muito longo de comprimento  $l$  e área de secção  $S$ , com  $N$  espiras, vimos na (9.5.31) que a auto-indutância é

$$L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} \quad (9.6.7)$$

de forma que, quando percorrido por uma corrente  $I$ , a energia armazenada é

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 (NI)^2 \frac{S}{l} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \mu_0 \frac{N}{l} I \right)^2 Sl = \frac{B^2}{2\mu_0} V$$

onde  $n = N/l$  é o número de espiras por unidade de comprimento,  $B$  é o campo (8.3.21) dentro do solenóide, e  $V = Sl$  é o volume interno a ele. Onde fica armazenada a energia  $U$ ?

Como o campo magnético está (com muito boa aproximação) confinado dentro do solenóide, podemos interpretar este resultado dizendo que *a energia está contida no campo magnético, com densidade de energia magnética*

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (9.6.8)$$

da mesma forma que, da expressão para a energia elétrica  $(1/2) C V^2$  armazenada num capacitor plano, inferimos, para a *densidade de energia elétrica* no vácuo, a expressão

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (9.6.9)$$

Se tivermos ao mesmo tempo, numa dada região do espaço (no vácuo) um campo elétrico e um campo magnético, a *densidade de energia eletromagnética* total do campo é

$$u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (9.6.10)$$

### Exemplo 4

Voltando ao Exemplo 2 (cabo coaxial), vimos que o campo dentro do cabo é

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (9.6.11)$$

o que dá

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \right)^2 = \frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{i^2}{\rho^2} \quad (9.6.12)$$

Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$ , onde  $(\rho, \varphi)$  são coordenadas polares na secção transversal e  $z$  a coordenada axial, a energia magnética contida entre  $z_0$  e  $z_0 + l$  (desprezando aquela no interior do fio central, como foi feito no tratamento anterior), é então

$$\begin{aligned} \int u_m dv &= \int_{z_0}^{z_0+l} dz \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi u_m = \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} i^2 \cdot l \int_a^b \frac{\rho d\rho}{\rho^2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

de modo que a energia magnética armazenada, por unidade de comprimento do cabo, é

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) i^2 = \frac{1}{2} \mathcal{L} i^2 \quad (9.6.13)$$

o que concorda com a expressão (9.5.23) para  $\mathcal{L}$ , a auto-indutância do cabo por unidade de comprimento.

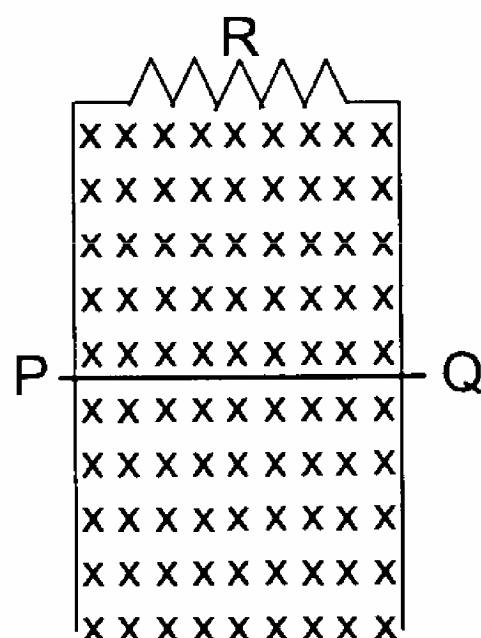
Podemos portanto calcular a indutância pelo cálculo da energia magnética armazenada (método alternativo).

## PROBLEMAS

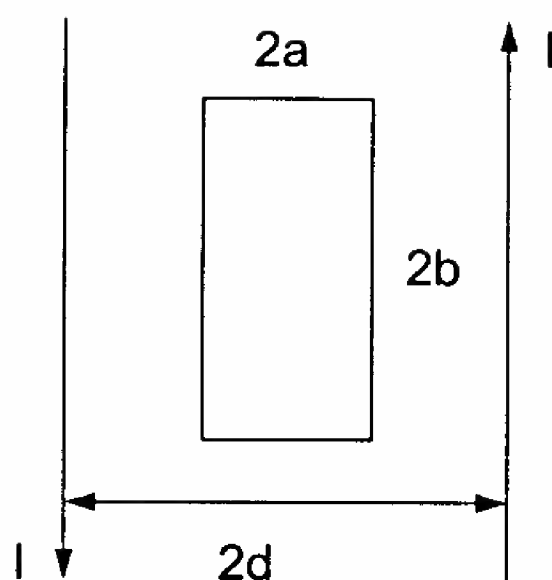
1. O princípio do *fluxômetro*, empregado para medir a intensidade  $B$  de um campo magnético, consiste em empregar uma pequena bobina de prova, com  $N$  espiras de área  $S$ , cujos terminais estão ligados a um galvanômetro balístico (veja Cap. 7, Probl. 5). A bobina, cuja resistência é  $R$ , é colocada com o plano das espiras perpendicular ao campo magnético que se deseja medir, do qual é removida subitamente. Isso gera um pulso de corrente, e o galvanômetro balístico mede a carga total  $Q$  associada a este pulso. Calcule o valor de  $B$  em função de  $N$ ,  $S$ ,  $R$  e  $Q$ .

2. Liga-se um voltímetro entre os trilhos de uma estrada de ferro, cujo espaçamento é de 1,5 m. Os trilhos são supostos isolados um do outro. A componente vertical do campo magnético terrestre no local é de 0,5 G. Qual é a leitura do voltímetro quando passa um trem a 150 km/h?

3. Em 1831, Michael Faraday fez girar um disco de cobre entre os pólos de um ímã em forma de ferradura e observou o aparecimento de uma diferença de potencial constante entre duas escovas, uma em contato com o eixo do disco e a outra na periferia. Seja  $a$  o raio do disco. (a) Se o disco gira com velocidade angular  $\omega$ , com seu plano perpendicular ao campo magnético uniforme  $B$ , qual é a diferença de potencial  $V$  gerada entre o eixo e a periferia? (b) Devido a esta diferença de potencial, passa uma corrente de intensidade  $I$  entre o eixo e a periferia. Calcule o torque que é necessário exercer para manter o disco girando e mostre que a potência fornecida é igual à potência gerada.



4. Uma barra metálica horizontal PQ de comprimento  $l$  e massa  $m$  escorrega com atrito desprezível sobre dois trilhos verticais unidos por uma haste horizontal fixa de resistência  $R$ . A resistência da barra e dos trilhos pode ser desprezada em confronto com  $R$ . O conjunto está situado num campo magnético  $B$  horizontal uniforme, orientado para dentro do plano da figura. (a) Qual é o sentido da corrente induzida? (b) Qual é a aceleração da barra? (c) Com que velocidade terminal  $v_0$  ela cai? (d) Qual é o valor correspondente da corrente? (e) Discuta o balanço da energia na situação terminal.



5. Uma espira retangular de lados  $2a$  e  $2b$  está no mesmo plano que um par de fios paralelos muito longos que transportam uma corrente  $I$  em sentidos opostos (um é o retorno do outro). O centro da espira está equidistante dos fios, cuja separação é  $2d$  (fig.). Calcule a indutância mútua entre a espira e o par de fios.

6. Uma espira circular de raio  $a$  tem no seu centro uma outra espira circular de raio  $b \ll a$ . Os planos das duas espiras formam entre si um ângulo  $\theta$ . Calcule a indutância mútua entre elas.

7. Calcule a indutância mútua entre uma espira circular de raio  $a$  e um fio retilíneo coplanar muito longo que transporta corrente  $I$  e está à distância  $b$  do centro da espira.

8. Calcule a auto-indutância de uma bobina toroidal de secção quadrada com lado  $L$  e de raio médio  $R$ .

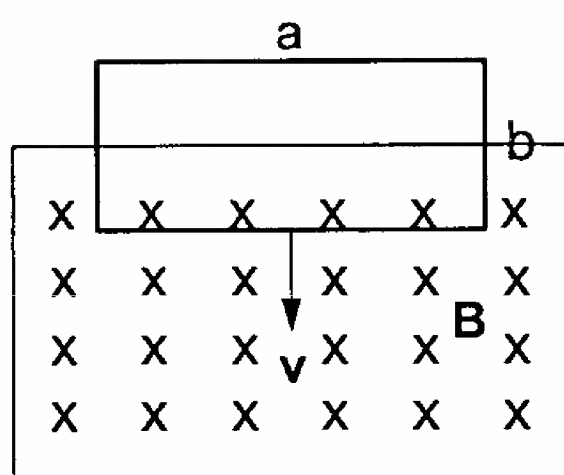
9. Uma pequena espira circular de raio  $a$  percorrida por uma corrente  $I$  desliza com velocidade  $v$  constante ao longo do eixo de outra espira circular de raio  $b \gg a$  e resistência  $R$ , aproximando-se dela, com os planos das duas espiras paralelos. Calcule a corrente induzida na espira de raio  $b$  para uma distância  $z \gg a$  entre os centros das duas espiras. Qual é o sentido relativo das correntes nas duas espiras?

10. Duas bobinas de auto-indutâncias  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, e indutância mútua  $L_{12}$ , estão ligadas em série. Mostre que a indutância do sistema é dada por

$$L = L_1 + L_2 \pm 2L_{12}$$

e discuta a origem do duplo sinal no último termo.

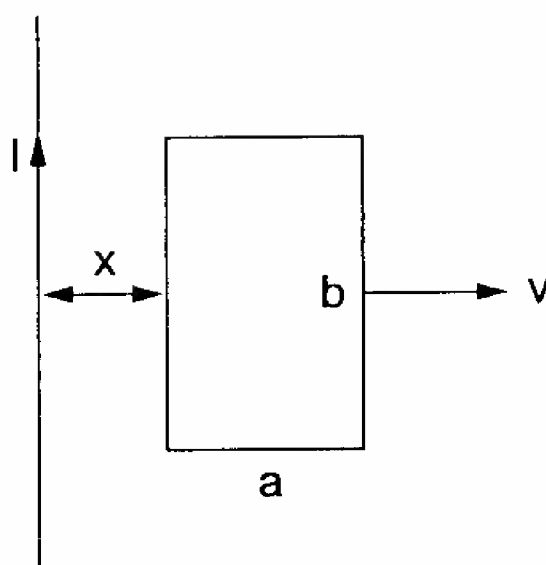




11. Uma espira retangular de lados  $a$  e  $b$  de resistência  $R$  cai num plano vertical e atravessa uma camada onde existe um campo magnético  $\mathbf{B}$  uniforme e horizontal (fig. ao lado).

(a) Obtenha a força magnética  $\mathbf{F}$  (módulo, direção, sentido) que atua sobre a espira enquanto ela ainda está *penetrando* no campo, num instante em que sua velocidade de queda é  $v$ .

(b) Repita o cálculo num instante posterior, em que a espira ainda está *saindo* do campo e sua velocidade é  $v'$ .



12. Uma espira retangular de lados  $a$  e  $b$  afasta-se com velocidade  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{x}}$  de um fio retilíneo muito longo, que transporta corrente contínua de intensidade  $I$ . A espira tem resistência  $R$  e auto-indutância desprezível. No instante considerado, sua distância ao outro fio é  $x$  (fig.).

(a) Calcule o fluxo  $\Phi$  de  $\mathbf{B}$  através da espira nesse instante.

(b) Calcule a magnitude  $i$  e o sentido de percurso da corrente induzida na espira nesse instante.

# 10

## CIRCUITOS

Uma das aplicações práticas mais importantes do eletromagnetismo é sua utilização em circuitos elétricos, desde aqueles empregados para transmissão e distribuição de potência em larga escala até os que fazem parte, por exemplo, da arquitetura de um microcomputador. Vamos discutir neste capítulo circuitos tanto de corrente contínua (DC) como alternada (AC), mas sempre com a restrição a *correntes quase-estacionárias* (o que exclui, por exemplo, circuitos de microondas).

No tratamento teórico de circuitos, é conveniente representar os seus elementos constituintes de forma idealizada. Assim, uma bobina real terá, além de sua auto-indutância, também resistência (a do fio) e capacitância entre seus terminais, mas é conveniente dissociar esses elementos uns dos outros e representá-los em termos de "indutância pura", "resistência pura" e "capacitância pura". Os fios condutores que ligam uma bobina a um capacitor têm resistência, mas convencionou-se desprezá-la e, se necessário, agregá-la à resistência de um "resistor puro".

### 10.1 Elementos de circuito

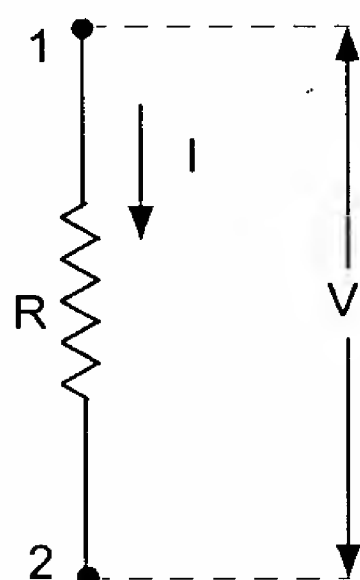



Figura 10.1 Resistor

#### (a) Resistor

Um resistor (ôhmico) é um elemento de circuito, representado por  (fig. 10.1), que obedece à lei de Ohm, ou seja, tal que, quando atravessado por uma corrente  $I$ , tem uma *queda de potencial* (no sentido da corrente:  $V \equiv V_1 - V_2$ ) através de seus extremos 1 e 2 dada por

$$V = RI \quad (10.1.1)$$

Num resistor, há uma conversão de energia elétrica em energia térmica, dada pelo efeito Joule: a potência dissipada é

$$P = I^2 R$$

(10.1.2)

## (b) Capacitor

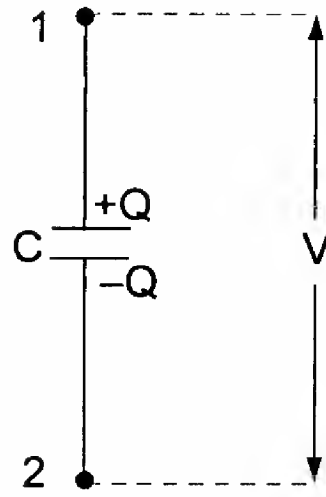
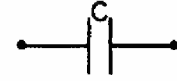


Figura 10.2 Capacitor

Num capacitor, representado por



(fig. 10.2), uma das placas (armaduras) tem carga  $Q$ , a outra  $-Q$ , (estas cargas podem variar com o tempo, desde que de forma *quase-estacionária*), e a queda de potencial  $V \equiv V_1 - V_2$  entre as placas é dada por

$$V = \frac{Q}{C}$$

(10.1.3)

onde  $C$  é a capacitância do capacitor.

Um capacitor armazena energia elétrica. A energia total armazenada é

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

(10.1.4)

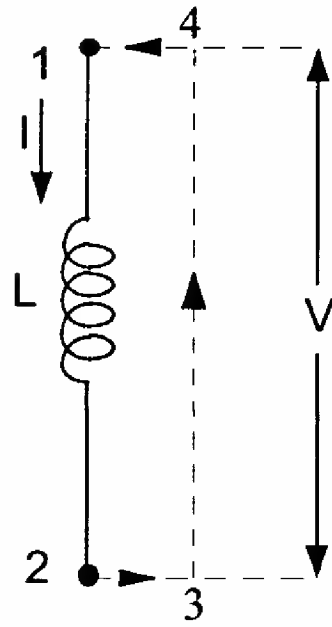
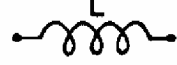


Figura 10.3 Indutor

## (c) Indutor

Um indutor, representado por



(fig. 10.3), é um elemento idealizado dentro do qual o campo magnético se supõe inteiramente confinado, como num solenóide infinito, e de resistência desprezível (logo, ao longo do solenóide, podemos tomar  $\mathbf{E} = 0$ , como num condutor perfeito). Tomando o circuito fechado 1234, onde 3 e 4 são arbitrariamente próximos de 1 e 2, respectivamente, vem então (fig. 10.3)

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{1234} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -L \frac{dI}{dt} \equiv \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(V_4 - V_3) \equiv -(V_1 - V_2) \equiv -V \quad (10.1.5)$$

ou seja,

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

(10.1.6)

é a queda de potencial através dos extremos do indutor, tomada no sentido da corrente.

Note que, na região entre 3 e 4 da fig. 10.3, é  $\mathbf{B} = 0$  e  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  [cf. (9.1.9)]; logo,  $V$  é bem definido.

Num indutor, há armazenamento de energia, sob a forma de energia magnética. A energia armazenada é

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \quad (10.1.7)$$

#### (d) Gerador

Um gerador é uma fonte de fem, que pode ser tratada de forma análoga ao que fizemos para uma bateria (gerador DC); é representado por  $\text{---} \textcircled{\mathcal{E}} \text{---}$  ou, para um gerador AC, por  $\text{---} \textcircled{\sim} \text{---}$  (fig. 10.4). Ao contrário dos anteriores, que são *passivos*, um gerador é um elemento *ativo* de um circuito, que *fornece* energia. Como vimos para a bateria, o gerador é atravessado pela corrente no sentido *inverso* ao da queda de potencial, de modo que

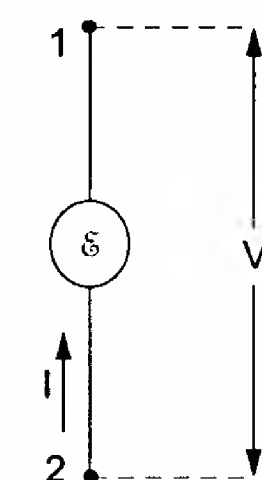


Figura 10.4 Gerador

$$V_1 - V_2 \equiv V = -\mathcal{E} \quad (10.1.8)$$

é a "queda" de potencial neste caso. O gerador *fornece* energia à taxa  $\mathcal{E}I$ .

## 10.2 As leis de Kirchhoff

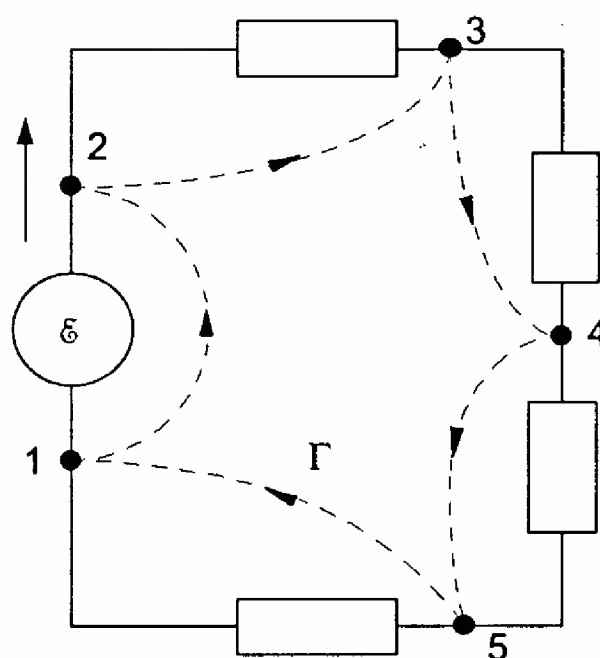


Figura 10.5 Circuito

Consideremos um circuito como o que está indicado esquematicamente na fig. 10.5, onde  $\text{---} \text{---} \text{---}$  representa qualquer elemento *passivo* ( $R$ ,  $C$  ou  $L$ ).

Se tomarmos um contorno  $\Gamma$  fechado que passa *por fora* de todos os elementos de circuito, onde o campo magnético  $\mathbf{B}$  é  $= 0$  (*em vista das idealizações feitas*), a lei da indução dá

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (10.2.1)$$

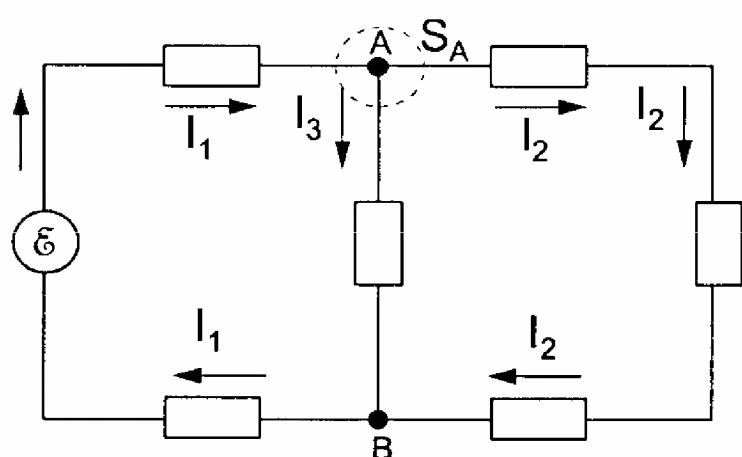
onde, por exemplo,

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 dV = V_1 - V_2 = -\mathcal{E} \quad (10.2.2)$$

é a *queda de tensão* entre os pontos 1 e 2.

Pela (10.2.1), a soma de todas as quedas de tensão ao longo de uma malha de um circuito é nula (1.<sup>a</sup> lei de Kirchhoff ou lei das malhas).

Essa soma é uma soma algébrica, lembrando que uma queda de tensão é *positiva* quando estamos indo de um ponto a outro no sentido da corrente e *negativa* quando em sentido oposto, e que a queda de tensão através de um gerador é o *oposto* da fem no sentido da corrente.



Consideremos agora um circuito como o da fig. 10.6, que tem duas *malhas*. Pontos como A ou B, em que se juntam dois ou mais elementos do circuito, chamam-se *nós*.

Figura 10.6 Circuito com duas malhas

Se tomarmos uma superfície fechada  $S_A$  em torno do nó A, o ponto A não é fonte nem sorvedouro de cargas (conservação da carga elétrica), de modo que, se  $\mathbf{j}$  é a densidade de corrente,

$$\oint_{S_A} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I_2 + I_3 - I_1 = 0 \quad (10.2.3)$$

ou seja, a soma algébrica de todas as correntes que saem de um nó (contando com o sinal – uma corrente que entra) é = 0 (2.<sup>a</sup> lei de Kirchhoff ou lei dos nós).

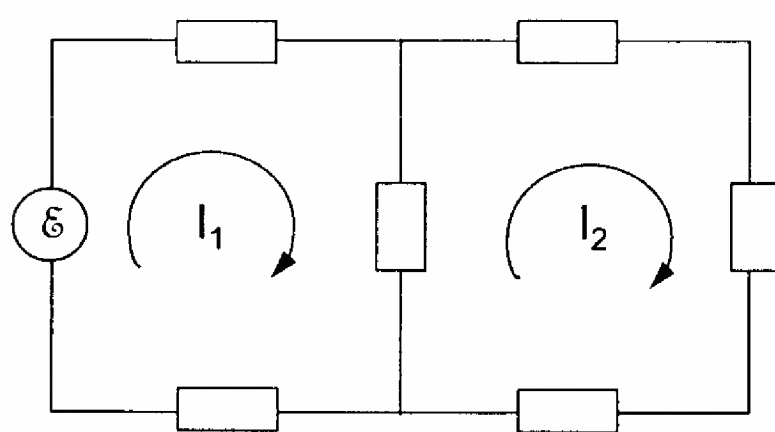


Figura 10.7 Correntes circulantes

Aplicando esta lei ao nó B, obteríamos o mesmo resultado (verifique!), ou seja,

$$I_3 = I_1 - I_2$$

Logo, somente as correntes  $I_1$  e  $I_2$  são variáveis independentes: podemos tratar um circuito com várias malhas, tomando como variáveis as *correntes circulantes nas malhas*, como na fig. 10.7, o que define a corrente através de cada elemento.

### 10.3 Transientes em circuitos R-C e R-L

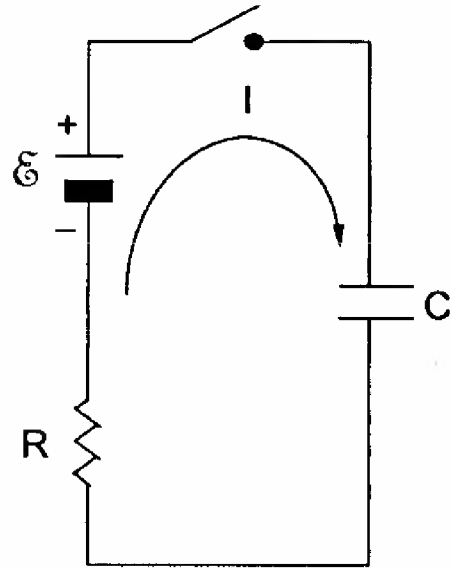


Figura 10.8 Circuito R-C

#### (a) Circuito R-C

Consideremos um capacitor, inicialmente descarregado e ligado a uma bateria de fem  $\varepsilon$ , e seja  $R$  a resistência do circuito (que inclui a resistência interna da bateria). Que acontece quando se liga a chave? (fig. 10.8)

Pela 1.<sup>a</sup> lei de Kirchhoff,

$$RI(t) - \varepsilon + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad (10.3.1)$$

onde  $I(t)$  é a corrente no instante  $t$  e  $q(t)$  a carga armazenada no capacitor nesse instante.

Mas a corrente  $I(t)$  está relacionada com a carga por

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \quad (10.3.2)$$

Logo, derivando a relação (10.3.1) com respeito a  $t$ , obtemos

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I(t)}{C} = 0 \quad \left\{ \quad \frac{dI}{I(t)} = -\frac{dt}{\tau_c} \right. \quad (10.3.3)$$

onde

$$\tau_c \equiv RC \quad (10.3.4)$$

tem a dimensão de um *tempo*:

$$\left( [R] = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}} \quad ; \quad [C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} \right)$$

Integrando entre  $t = 0$  [quando  $q = 0$  e  $I(0) = \frac{\varepsilon}{R}$  pela 1.<sup>a</sup> lei (10.2.1)] e  $t$ ,

$$\ln \frac{I(t)}{I(0)} = -\frac{t}{\tau_c} \quad \left\{ \quad I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \right. \quad (10.3.5)$$

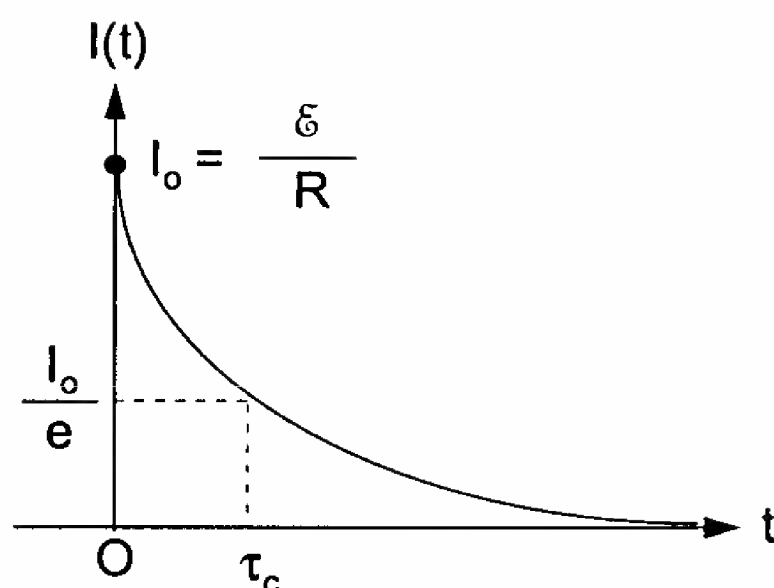


Figura 10.9 Corrente de carga de um capacitor

Vemos que a *corrente de carga* (fig. 10.9) do capacitor *decai exponencialmente com o tempo*, com *constante de tempo*  $\tau_c = RC$  (tempo que leva para cair a  $1/e$  do valor inicial).

Para  $t \gg \tau_c$ , a corrente  $I(t)$  é  $\approx 0$  e o capacitor atinge a carga final  $Q = C\mathcal{E}$  [cf. (10.3.1) e (10.3.8)].

Se, com o capacitor inicialmente carregado, removermos a bateria e fecharmos o circuito, o capacitor se *descarrega* com a mesma lei exponencial e a mesma constante de tempo.

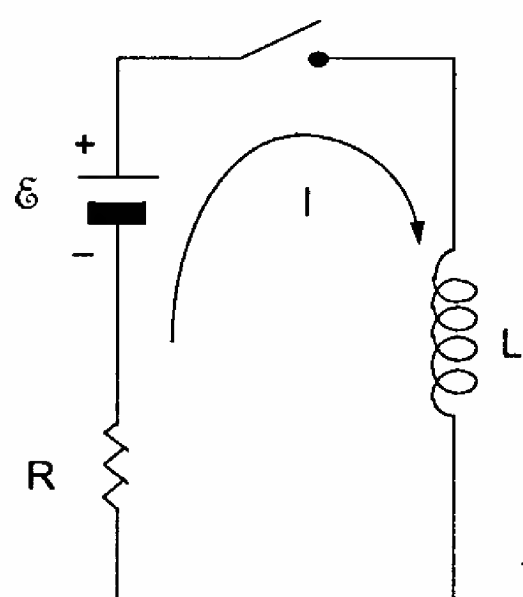


Figura 10.10 Circuito R-L

### (b) Circuito R-L

Analogamente ao caso anterior, quando se liga a chave, a 1.<sup>a</sup> lei de Kirchhoff, aplicada à malha, dá (fig. 10.10)

$$RI - \mathcal{E} + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (10.3.6)$$

onde, para  $t = 0$ ,  $I = I_0 = 0$ .

Comparando com a equação para  $q(t)$  no caso da carga do capacitor, onde

$$I = \frac{dq}{dt}$$

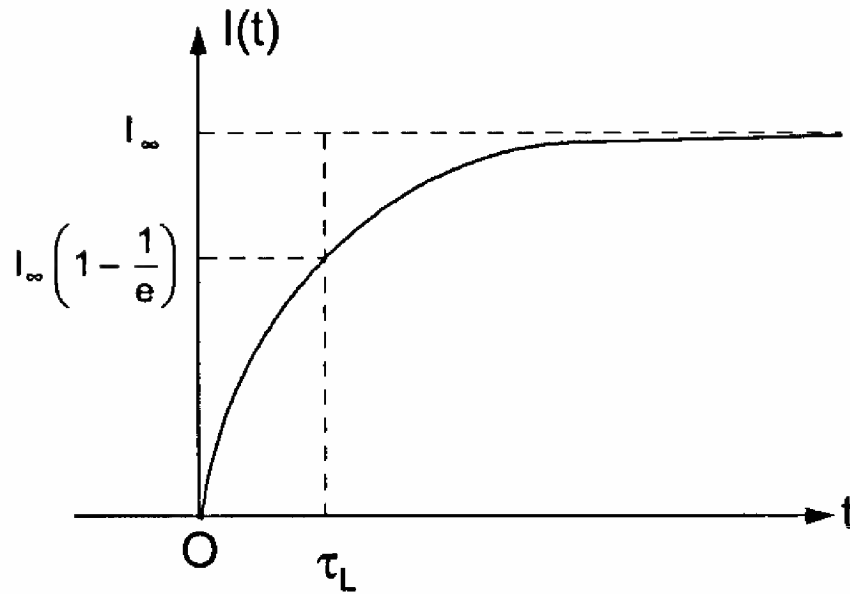
vemos que as equações são idênticas, desde que se façam as mudanças:  $q \rightarrow I$ ,  $R \rightarrow L$ ,  $1/C \rightarrow R$ , o que implica

$$\tau_c \rightarrow \tau_L \equiv \frac{L}{R} \quad (10.3.7)$$

Também as condições iniciais se correspondem, pois  $q(0) = q_0 = 0$  para o capacitor.

Integrando em relação ao tempo o resultado (10.3.5) obtido para o capacitor, vem:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \int_0^t I(t') dt' = \frac{\mathcal{E}}{R} \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau_c}\right) dt' = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot (-\tau_c) \exp\left(-\frac{t'}{\tau_c}\right) \Big|_0^t = \\
 &= \frac{\mathcal{E} \tau_c}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)\right] \quad \left\{ \quad q(t) = \mathcal{E} C \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)\right] \right. \quad (10.3.8)
 \end{aligned}$$



Com as mudanças indicadas, vem então, para o circuito  $R$ - $L$  (fig. 10.11)

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)\right] \quad (10.3.9)$$

Figura 10.11 Crescimento da corrente no circuito  $R$ - $L$

mostrando que a corrente se aproxima exponencialmente de seu valor assintótico dado pela lei de Ohm,  $I_\infty = \mathcal{E}/R$ , com *constante de tempo*  $\tau_L = L/R$  (demora tanto mais quanto maior for  $L$ , devido ao efeito de *inércia* da lei da indução, que se opõe à variação do fluxo, e por conseguinte da corrente).

Os dois efeitos que acabamos de considerar, nos circuitos  $R$ - $C$  e  $R$ - $L$ , são típicos *efeitos transientes* (ou *transitórios*), que tendem a desaparecer após um tempo característico do sistema, que é a constante de tempo. Em geral, estamos interessados apenas na *solução estacionária*, que se estabelece assintoticamente, para tempos  $t \gg$  constante de tempo característica do circuito.

## 10.4 Oscilações livres num circuito L-C

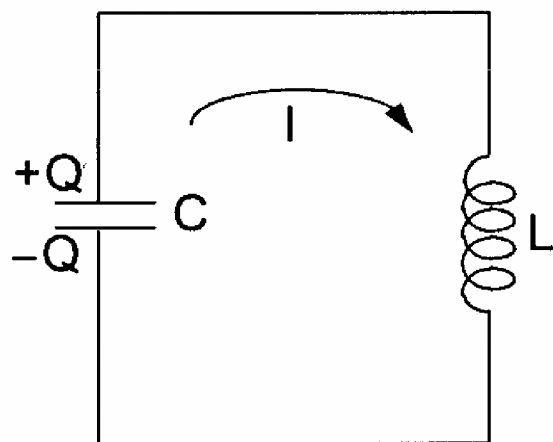


Figura 10.12 Circuito L-C

Consideremos um circuito idealizado, que consiste exclusivamente em um capacitor de capacitância  $C$  e um indutor de auto-indutância  $L$  (fig. 10.12). Como desprezamos inteiramente a resistência (veremos depois seus efeitos), não há dissipação, e a energia inicialmente armazenada no circuito se conserva. Podemos considerar,



por exemplo, que essa energia corresponde a uma carga inicial do capacitor.

A 1.<sup>a</sup> lei de Kirchhoff dá

$$\boxed{\frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0} \quad (10.4.1)$$

ou, derivando em relação ao tempo, com  $dQ/dt = I$ ,

$$\frac{I}{C} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0} \end{array} \right. \quad (10.4.2)$$

onde

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (10.4.3)$$

que dá a *frequência angular das oscilações livres* neste circuito.

A equação para  $I$  é a equação de um *oscilador harmônico* de frequência angular  $\omega_0$ . Usando notação complexa ( $i \equiv \sqrt{-1}$ ), a solução geral (*Física Básica 2*, Seç. 3.2) é

$$\boxed{I(t) = \text{Re} \left( A e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega_0 t} \right) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)} \quad (10.4.4)$$

onde  $A$  (*amplitude real*) e  $\varphi$  (*fase inicial*) são as duas constantes reais necessárias para satisfazer às duas condições iniciais (a equação diferencial é de 2.<sup>a</sup> ordem), por exemplo, a especificação da carga inicial  $Q_0$  no capacitor e da corrente inicial  $I_0$  através do indutor.

Assim, integrando em relação a  $t$ , basta escrever

$$\boxed{Q(t) = \frac{A}{\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t + \varphi)} \quad (10.4.5)$$

sem constante de integração adicional, pois já temos duas constantes arbitrárias:

$$\left. \begin{array}{l} I(0) = I_0 = A \cos \varphi \\ Q(0) = Q_0 = \frac{A}{\omega_0} \text{sen} \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{A = \sqrt{I_0^2 + \omega_0^2 Q_0^2}} \\ \boxed{\varphi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega_0 Q_0}{I_0} \right)} \end{array} \quad (10.4.6)$$

o que determina  $A$  e  $\varphi$  em função dos valores iniciais  $Q_0$  e  $I_0$ . Por exemplo, se inicialmente não há corrente,  $I_0 = 0$ , e a carga está toda concentrada no capacitor, temos  $A = \omega_0 Q_0$  e  $\varphi = \pi/2$ .

A energia armazenada no capacitor no instante  $t$  é (usando  $\omega_0^2 = 1/LC$ )

$$U_C(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{A^2}{2\omega_0^2 C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} L A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (10.4.7)$$

e podemos pensar nela como inteiramente contida no campo elétrico entre as placas do capacitor.

A energia armazenada no indutor no instante  $t$  é

$$U_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (10.4.8)$$

que é a energia magnética contida no campo **B** dentro do indutor.

A energia total é

$$U = U_L + U_C = \frac{1}{2} L A^2 = \frac{1}{2} \frac{A^2}{\omega_0^2 C} \quad (10.4.9)$$

e se conserva, dada a ausência de dissipação ( $R = 0$ ).

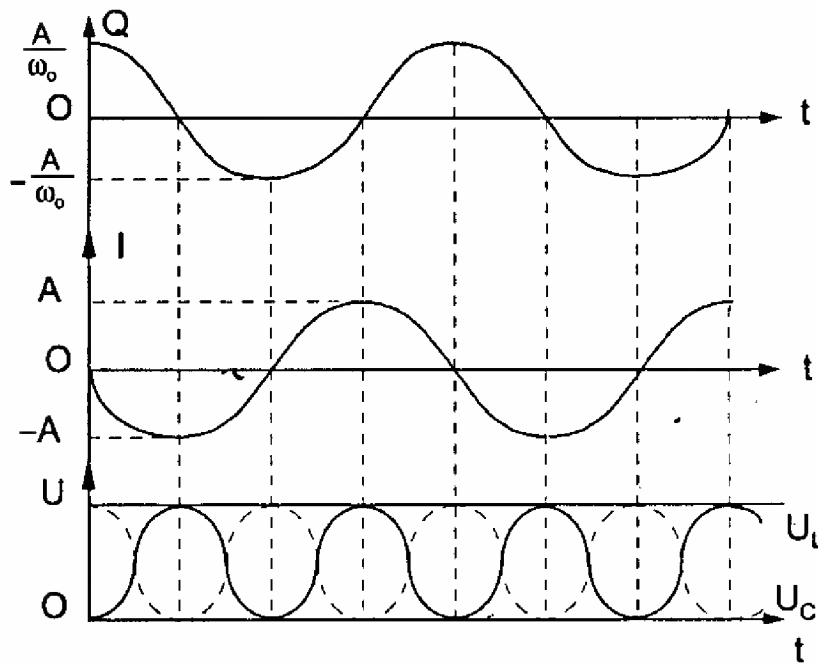


Figura 10.13 Carga  $Q$ , corrente  $I$  e energia  $U$  em função do tempo

Os gráficos da fig. 10.13 ilustram o andamento da carga  $Q$  e da corrente  $I$  em função do tempo, para a condição inicial  $I_0 = 0$ , bem como das contribuições elétrica ( $U_C$ ) e magnética ( $U_L$ ) à energia total  $U$ .

Como

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

vemos que a corrente  $I$  está *adiantada* de  $\pi/2$ , na fase, em relação à carga (*em quadratura*). Tanto a corrente como a carga trocam de sinal (sentido) a cada hemiciclo. A energia oscila entre energia elétrica e energia magnética, mantendo constante a *energia eletromagnética total* (soma das duas).

Há uma analogia completa entre as oscilações *elétricas* desse circuito e as oscilações *mecânicas* livres de uma partícula de massa  $m$  presa a uma mola de constante de

mola  $k$ , sendo  $x$  o deslocamento da massa a partir do equilíbrio (*Física Básica 2*, Seq. 3.1; Tabela 10.1).

Tabela 10.1

OSCILADOR MECÂNICO		OSCILADOR L-C
$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$	$\longleftrightarrow$	$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = 0$
$x, m, k, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\longleftrightarrow$	$Q, L, \frac{1}{C}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
$v = \frac{dx}{dt}$		$I = \frac{dQ}{dt}$
Energia cinética: $T = \frac{1}{2} m v^2$	$\longleftrightarrow$	Energia magnética: $U_M = \frac{1}{2} L I^2$
Energia potencial: $V = \frac{1}{2} k x^2$	$\longleftrightarrow$	Energia elétrica: $U_E = \frac{Q^2}{2C}$

Note, em particular, que  $L$  representa *inércia* (massa  $m$ ).

## 10.5 Oscilações amortecidas: circuito R-L-C

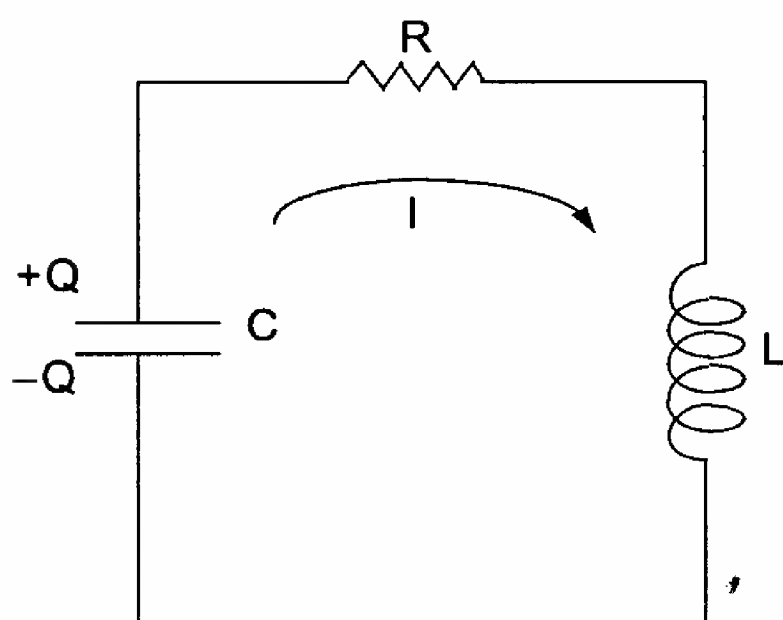


Figura 10.14 Circuito R-L-C

Consideremos agora a situação mais realista em que levamos em conta a resistência  $R$  que deve existir sempre no circuito, além de  $L$  e  $C$  (fig. 10.14).

A 1.ª lei de Kirchhoff dá agora

$$\frac{Q}{C} + R I + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (10.5.1)$$

ou seja, derivando em relação a  $t$  e dividindo por  $L$ ,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (10.5.2)$$

ou ainda, indicando por  $(\dot{\phantom{x}})$  uma derivada em relação a  $t$ ,

$$\ddot{I} + \gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (10.5.3)$$

onde

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad \gamma = \frac{R}{L} \equiv \frac{1}{\tau_L} \quad (10.5.4)$$

Reconhecemos a equação diferencial de um *oscilador harmônico amortecido* onde a resistência introduz o amortecimento (atrito). O equivalente mecânico corresponderia à massa, ligada à mola, oscilando dentro de um fluido viscoso. Usando a notação complexa para a solução (*Física Básica 2*, Seq. 4.1),

$$I(t) = \text{Re} \left( A e^{i\varphi} \cdot e^{pt} \right) \quad (10.5.4)$$

obtemos a equação característica [ $d/(dt)$  corresponde à multiplicação por  $p$ ]

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad \left\{ \quad p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \right.$$

Consideraremos apenas o caso de *amortecimento subcrítico*, em que

$$\left\{ \frac{\gamma}{2} < \omega_0 \right\} \quad \left\{ \equiv \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \right\} \quad \left\{ \quad R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \right\} \quad (10.5.5)$$

Obtemos

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_1 \quad , \quad \omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (10.5.6)$$

onde basta tomar a solução com sinal +, pois já temos duas constantes arbitrárias  $A$  e  $\varphi$  para satisfazer às condições iniciais. Então,

$$I(t) = \text{Re} \left[ A e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega_1 t + \varphi)} \right]$$

ou seja,

$$I(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (10.5.7)$$

que se reduz à solução anterior quando  $R = 0$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow \omega_0$ ).

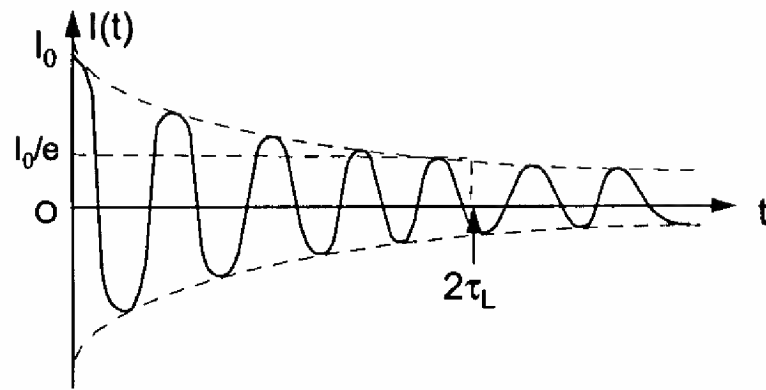


Figura 10.15 Oscilações amortecidas da corrente

A corrente oscila, mas com amortecimento exponencial (envoltória) de constante de tempo  $2/\gamma \equiv 2\tau_L$  (fig. 10.15).

Logo, é também uma corrente *transiente* (como tinha de ser, pois só há elementos passivos e há dissipação).

### Amortecimento fraco

Vamos supor que

$$\gamma \ll \omega_0 \quad (\Rightarrow \omega_1 \approx \omega_0) \quad (10.5.8)$$

Nesse caso,

$$Q(t) = \int^t I(t') dt' = \text{Re} \left( A e^{i\varphi} \cdot \frac{e^{pt}}{p} \right) \approx \text{Re} \left( -\frac{iA}{\omega_1} e^{i\varphi} e^{pt} \right)$$

onde aproximamos  $p = p_+$  por  $i\omega_1$ , no denominador, e as constantes  $A$  e  $\varphi$  são determinadas pelas condições iniciais,  $Q(0)$  e  $I(0)$ . Assim,

$$Q(t) \approx \frac{A}{\omega_1} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (10.5.9)$$

A energia  $U_C$  armazenada no capacitor no instante  $t$  é

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{A^2}{2\omega_1^2 C} e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_1 t + \varphi) \approx \frac{A^2}{2\omega_0^2 C} e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_1 t + \varphi),$$

o que dá

$$U_C(t) \approx \frac{LA^2}{2} e^{-\gamma t} \sin^2(\omega_1 t + \varphi) \quad (10.5.10)$$

A energia  $U_L$  armazenada no indutor no instante  $t$  é

$$U_L(t) = \frac{1}{2} LI^2(t) = \frac{LA^2}{2} e^{-\gamma t} \cos^2(\omega_1 t + \varphi) \quad (10.5.11)$$

Logo, a energia *total* armazenada no circuito no instante  $t$  é

$$U(t) = U_C(t) + U_L(t) = \frac{1}{2} L A^2 e^{-\gamma t} \quad (10.5.12)$$

mostrando que  $dU/dt = -\gamma U$  ( $\gamma$  é a taxa de amortecimento da energia).

A energia dissipada em calor (efeito Joule) é

$$\frac{dW}{dt} = R I^2(t) = R A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega_1 t + \varphi) \quad (10.5.13)$$

A energia dissipada em um ciclo de oscilação (entre  $t$  e  $t + \tau$ , onde  $\tau = 2\pi/\omega_1$ ), é

$$\int_t^{t+\tau} \frac{dW}{dt'} dt' \approx R A^2 e^{-\gamma t} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} \cos^2(\omega_1 t' + \varphi) dt' \quad (10.5.14)$$

onde o fator exponencial foi tirado para fora da integral porque quase não varia durante um ciclo, por ser

$$\gamma \ll \omega_1 \Rightarrow \gamma \tau = 2\pi \frac{\gamma}{\omega_1} \ll 1$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} \underbrace{\cos^2(\omega_1 t' + \varphi)}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_1 t' + \varphi)} dt' &= \frac{t'}{2} \Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} + \frac{1}{4\omega_1} \left[ \sin(2\omega_1 t' + \varphi) \Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\omega_1} \right) + \frac{1}{4\omega_1} \underbrace{\left\{ \sin(2\omega_1 t + \varphi + 4\pi) - \sin(2\omega_1 t + \varphi) \right\}}_{=0} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} \cos^2(\omega_1 t' + \varphi) dt' = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\omega_1} \right) \quad (10.5.15)$$

o que equivale a substituir o  $(\cos)^2$  pela sua média  $1/2$  por período. Assim,

$$\text{Energia dissipada por ciclo} = \frac{1}{2} R A^2 e^{-\gamma t} \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (10.5.16)$$

Chama-se *fator de mérito* ou *fator Q* (de Qualidade) do oscilador a razão

$$Q \equiv 2\pi \frac{\text{Energia armazenada}}{\text{Energia dissipada por ciclo}} \quad (10.5.17)$$

Quanto maior  $Q$ , menor a *perda fracionária de energia por ciclo*. Neste caso, temos

$$Q \approx \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2} LA^2 e^{-\gamma t}}{\frac{1}{2} RA^2 e^{-\gamma t} \cdot \frac{2\pi}{\omega_1}} \quad \left\{ \quad Q = \frac{\omega_1 L}{R} = \frac{\omega_1}{\gamma} \left( \approx \frac{\omega_0}{\gamma} \right) \right. \quad (10.5.18)$$

A condição de *amortecimento fraco* é portanto *equivalente* à condição:  $Q \gg 1$  (*elevado fator de mérito*).

## 10.6 Circuitos AC

A corrente elétrica distribuída para utilização industrial e residencial é *corrente alternada* (AC, do inglês "Alternating Current"), tipicamente de frequência  $\nu = 60 \sim$  (ciclos/seg) ( $\omega = 2\pi\nu \approx 377 \text{ Hz}$ ). Já vimos o princípio da geração de corrente alternada pela rotação de uma bobina num campo magnético.

A principal vantagem da corrente alternada é que sua voltagem pode ser facilmente amplificada ou reduzida usando *transformadores* (que discutiremos na Seq. 10.8).

Isso permite transmitir a energia elétrica em linhas de *alta voltagem*, convertendo-a no valor "caseiro" (110 V, tipicamente) ao chegar a seu destino. A vantagem da transmissão de potência em alta voltagem é que a *corrente*  $I$  associada é baixa, reduzindo a perda por efeito Joule nos fios de transmissão ( $I^2 R$ ).

O gerador que alimenta o circuito equivale, na analogia com a mecânica, a uma *força externa* oscilatória de frequência angular  $\omega$ . Como vimos ao estudar *oscilações forçadas* na mecânica (*Física Básica 2*, Seq. 4.3), a resposta do sistema nestas condições consiste em duas partes: (i) a *resposta transiente*, que contém o efeito das condições iniciais, e tende a desaparecer para  $t \gg \tau$ , onde  $\tau$  é uma constante de tempo característica do sistema. Essa resposta, que é solução de uma equação diferencial *homogênea* (sem força externa), corresponde às *oscilações livres* dos circuitos que vimos na rede  $R$ - $L$ - $C$ , e é amortecida pela dissipação na resistência. (ii) a *solução estacionária*, que persiste para  $t \rightarrow \infty$ , e corresponde às *oscilações forçadas*, de mesma frequência  $\omega$  que a excitação externa (gerador).

Em geral, estamos interessados somente na solução estacionária, e é somente ela que vamos discutir, desprezando os efeitos transientes. Logo, *todas* as grandezas que vamos considerar oscilam com a mesma frequência  $\omega$ , tornando vantajoso o emprego da

*notação complexa*, em que a dependência temporal é sempre\* da forma  $e^{i\omega t}$ ; para derivar qualquer grandeza complexa em relação ao tempo, basta portanto multiplicá-la por  $i\omega$ :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \leftrightarrow i\omega} \quad (10.6.1)$$

Esta é a principal simplificação decorrente do uso da notação complexa.

Vamos usar as seguintes convenções de notação para representar as diferentes grandezas, exemplificadas pela voltagem  $V(t)$

$$\begin{aligned} V(t) &= \text{Re} [\hat{V}(t)] \\ \hat{V}(t) &= \bar{V} e^{i\omega t} \\ \bar{V} &= V_m e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (10.6.2)$$

$\bar{V}$  é a *amplitude complexa* de  $\hat{V}$ ;  $\varphi$  é a *fase* de  $\bar{V}$ . Resulta

$$\boxed{V(t) = \text{Re} [V_m e^{i(\omega t + \varphi)}] = V_m \cos(\omega t + \varphi)} \quad (10.6.3)$$

mostrando que  $V_m = |\bar{V}|$  dá o *valor máximo* de  $V(t)$ . Analogamente,

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{Re} [\hat{I}(t)] = \text{Re} [\bar{I} e^{i\omega t}] \\ \xi(t) &= \text{Re} [\hat{\xi}(t)] = \text{Re} [\bar{\xi} e^{i\omega t}] \end{aligned} \quad (10.6.4)$$

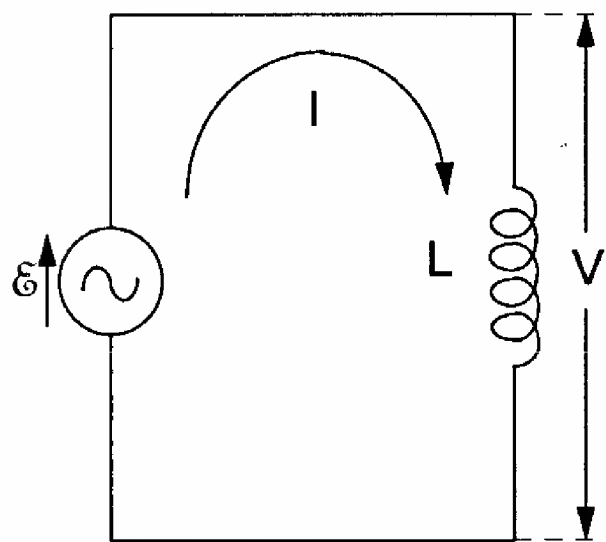


Figura 10.16 Indutor e gerador AC

### Reatâncias

No circuito da fig. 10.16, *puramente indutivo*, temos

$$-\xi + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \left\{ \quad \boxed{L \frac{dI}{dt} = \xi} \right. \quad (10.6.5)$$

\* Esta convenção é a mais adotada em engenharia.



Em notação complexa,

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}} e^{i\omega t} = L \frac{d}{dt} (\bar{I} e^{i\omega t}) = i\omega L \bar{I} e^{i\omega t} \quad (10.6.6)$$

o que dá para a solução estacionária

$$\bar{\mathcal{E}} = i\omega L \bar{I} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} \bar{I} \quad (10.6.7)$$

e, tomando  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_m$  (real),  $\Rightarrow \mathcal{E} = \text{Re}(\mathcal{E}_m e^{i\omega t}) = \mathcal{E}_m \cos(\omega t)$

$$I(t) = \text{Re}(\bar{I} e^{i\omega t}) = \text{Re}\left(\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

o que dá

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t) \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \sin(\omega t) \quad (10.6.8)$$

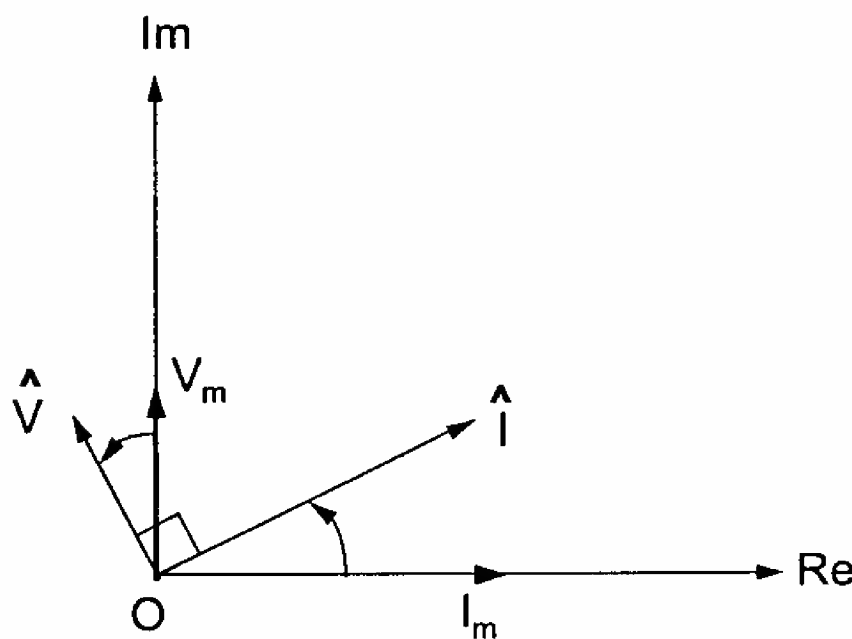
Lembrando que  $L dI/dt$  também é a *queda de tensão*  $V$  através do indutor, com  $V = \text{Re}(\bar{V} e^{i\omega t})$ , temos também

$$\bar{V} = i\omega L \bar{I} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} \bar{I} \quad (10.6.9)$$

Se em lugar de  $L$  tivéssemos uma *resistência*  $R$ , a lei de Ohm daria

$$V = R I, \quad \bar{V} = R \bar{I} \quad (10.6.10)$$

mostrando que a voltagem e a corrente através de um resistor estão *em fase*.



Já para um indutor, o fator  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  em  $\bar{V}/\bar{I}$  mostra que a corrente *num indutor está atrasada de  $\pi/2$  em relação à voltagem*. No plano complexo (fig. 10.17), os vetores  $\hat{V}$  e  $\hat{I}$  giram no sentido anti-horário com velocidade angular  $\omega$  (fator  $e^{i\omega t}$ ), mantendo-se perpendiculares entre si, com  $\hat{V}$  adiantado de  $\pi/2$  sobre  $\hat{I}$  (diz-se também que estão *em quadratura*).

Figura 10.17 Representação complexa de  $\hat{V}$  e  $\hat{I}$  para um indutor

A razão

$$\frac{V_m}{I_m} = \omega L \equiv X_L \quad (10.6.11)$$

entre os valores máximos da voltagem e da corrente através do indutor chama-se *reatância indutiva* do indutor.

Em particular,  $X_L \rightarrow 0$  para  $\omega \rightarrow 0$ , conforme seria de se esperar: para corrente *contínua* (sem variação de fluxo), o indutor se comporta como um curto-circuito. Para  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $X_L \rightarrow \infty$ : variações rápidas são bloqueadas.

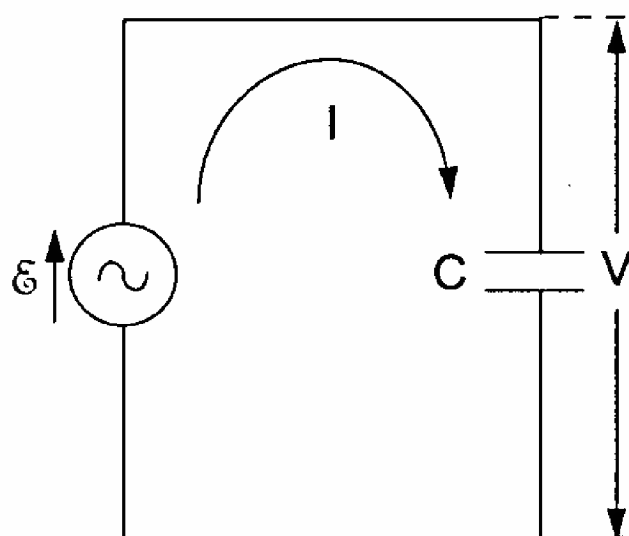


Figura 10.18 Capacitor e gerador AC

Analogamente, se considerarmos o circuito da fig. 10.18, *puramente capacitivo*, vem:

$$-\mathcal{E} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \left\{ \quad Q = C V \quad \right. \quad (10.6.12)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (10.6.13)$$

e

$$\hat{I} = \bar{I} e^{i\omega t} = C \frac{d}{dt} \hat{V} = C \frac{d}{dt} (\hat{V} e^{i\omega t}) = i\omega C \bar{V} e^{i\omega t} \quad (10.6.14)$$

o que dá

$$\bar{I} = i\omega C \bar{V} \quad \left\{ \quad \bar{V} = -\frac{i}{\omega C} \bar{I} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \bar{I} \quad \right. \quad (10.6.15)$$

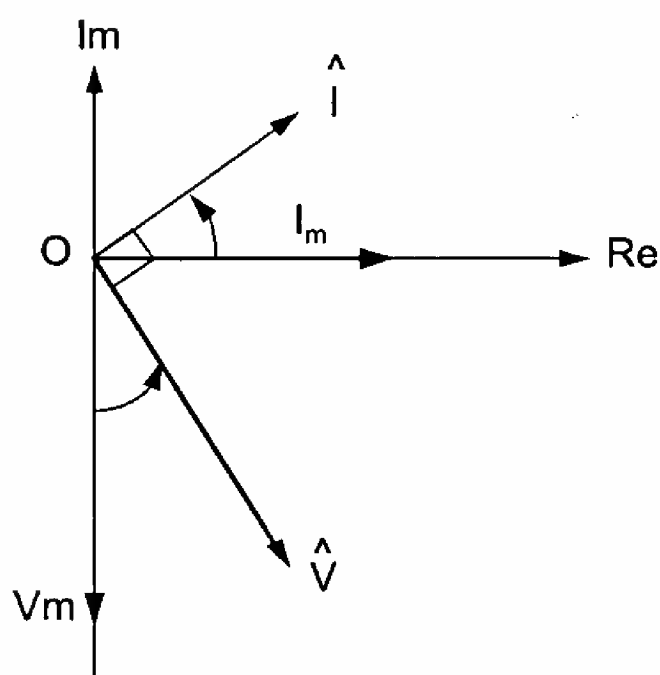


Figura 10.19 Representação complexa de  $\hat{V}$  e  $\hat{I}$  para um capacitor.

Logo, a corrente num capacitor está *adiantada* de  $\pi/2$  em relação à voltagem.

Temos ainda:

$$\frac{V_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C} = X_C \quad (10.6.16)$$

como a *reatância capacitiva* do capacitor.

Para  $\omega \rightarrow 0$ ,  $X_C \rightarrow \infty$ : as placas do capacitor estão isoladas uma da outra (circuito aberto). Para  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $X_C \rightarrow 0$ : variações rápidas são transmitidas.

No plano complexo, os vetores representativos de  $\hat{V}$  e  $\hat{I}$  giram com velocidade angular  $\omega$ , com  $\hat{V}$  sempre atrasado de  $\pi/2$  em relação a  $\hat{I}$  (fig. 10.19).

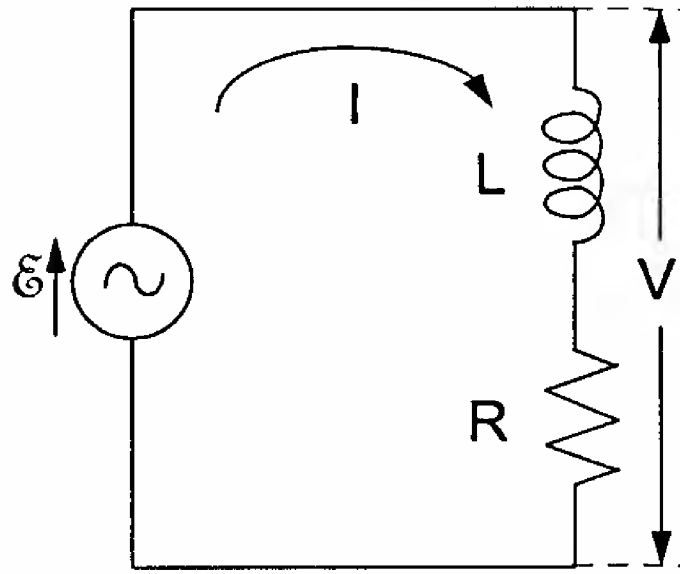


Figura 10.20 Circuito R-L com gerador AC

### Impedância

Consideremos agora o circuito R-L (fig. 10.20) em corrente alternada (solução estacionária):

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (10.6.17)$$

$$\hat{V} = \bar{V} e^{i\omega t} = (R + i\omega L) \bar{I} e^{i\omega t} = (R + i\omega L) \hat{I} \quad (10.6.18)$$

de forma que

$$\frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \equiv \bar{Z} = R + i\omega L = R + iX_L \quad (10.6.19)$$

onde  $\bar{Z}$  chama-se a *impedância complexa*: sua parte real é a resistência  $R$ , e a parte imaginária é a reatância indutiva  $X_L = \omega L$ .

A relação

$$\hat{V} = \bar{Z} \hat{I} \quad , \quad \text{ou} \quad \bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad (10.6.20)$$

é uma *generalização complexa da lei de Ohm*,  $V = RI$ .

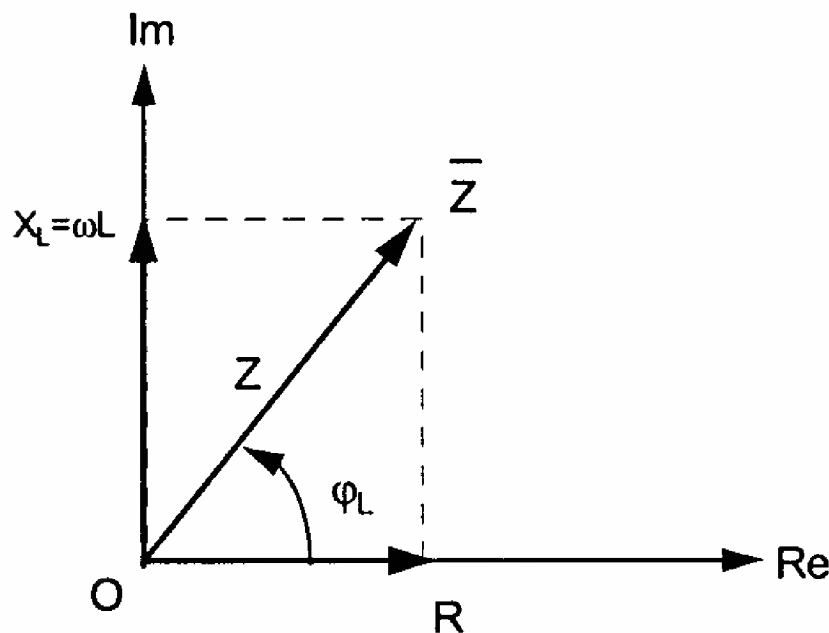


Figura 10.21 Impedância complexa do circuito R-L

Conforme mostra a fig. 10.21,

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= |\bar{Z}| e^{i\varphi_L} \equiv Z e^{i\varphi_L} ; \varphi_L = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \\ Z &= |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned} \quad (10.6.21)$$

onde a grandeza *real*  $Z$  chama-se *impedância* do par R-L.

Voltando à notação real, com  $\bar{V} = V_m$ ,

$$V(t) = \text{Re } \hat{V} = \text{Re} \left( V_m e^{i\omega t} \right) = V_m \cos \omega t \quad (10.6.22)$$

o que dá

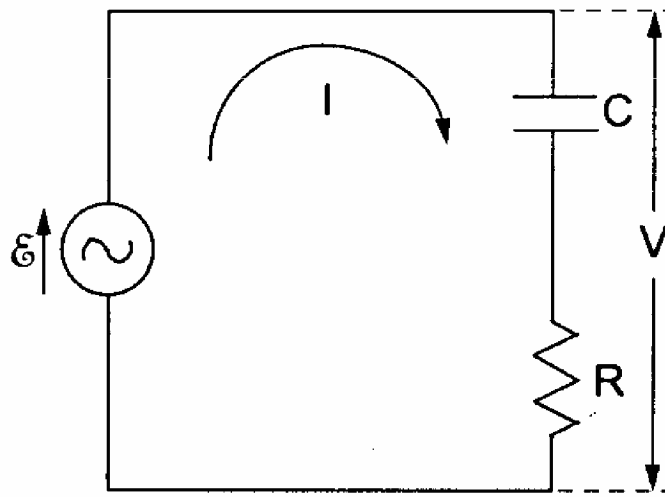
$$I(t) = \text{Re} \left( \frac{\hat{V}}{\bar{Z}} \right) = \text{Re} \left( \frac{V_m}{Z} e^{-i\varphi_L} e^{i\omega t} \right)$$

$$I(t) = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \varphi_L) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left[ \omega t - \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad (10.6.23)$$

A amplitude máxima da *corrente*,  $I_m$ , é  $= V_m / Z$ , e a sua fase está *atrasada* em relação à da *voltagem* por

$$\varphi_L = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

que, para  $R \rightarrow 0$ , tende a  $\pi/2$  (resultado anterior).



Analogamente, para um circuito  $R$ - $C$  (fig. 10.22),

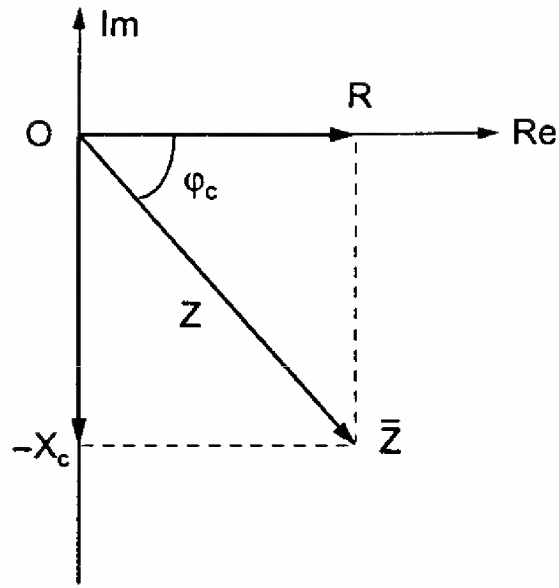
$$\hat{V} = \frac{\hat{Q}}{C} + R \hat{I} \quad (10.6.24)$$

Figura 10.22 Circuito  $R$ - $C$  com gerador A-C

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = i\omega \hat{V} = \frac{\hat{I}}{C} + R \frac{d\hat{I}}{dt} = i\omega \left( R + \frac{1}{i\omega C} \right) \hat{I}$$

o que dá

$$\frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \equiv \bar{Z} = R - \frac{i}{\omega C} = R - iX_C \equiv Z e^{-i\varphi_C} \quad (10.6.25)$$



$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} ;$$

$$\varphi_C = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\omega R C}\right)$$

(10.6.26)

$$I(t) = \operatorname{Re} \left( \frac{V_m}{Z} e^{i\varphi_C + i\omega t} \right)$$

(10.6.27)

Figura 10.23 Impedância complexa do circuito R-C

$$I(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos \left[ \omega t + \underbrace{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\omega R C}\right)}_{\varphi_C} \right] \quad (10.6.28)$$

A fase da corrente está *adiantada* de  $\varphi_C$  (que  $\rightarrow \pi/2$  para  $R \rightarrow 0$ ) em relação à da voltagem (fig. 10.23)

Decorre das leis de Kirchhoff que *impedâncias se combinam em série ou paralelo como resistências*.

### Valor eficaz e potência média

A potência *instantânea* dissipada em calor por uma corrente alternada numa resistência  $R$  é

$$\frac{dW}{dt} = [I(t)]^2 R = I_m^2 R \cos^2(\omega t + \psi) \quad (10.6.29)$$

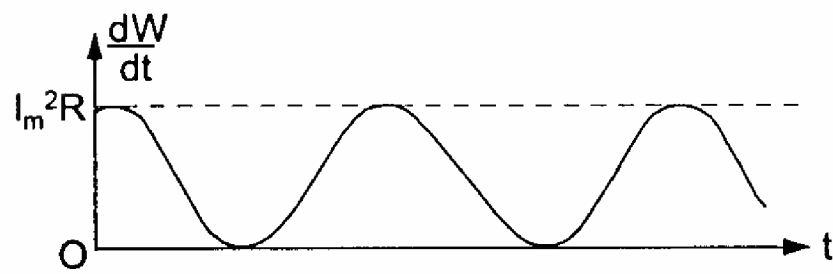


Figura 10.24 Potência instantânea AC dissipada em R

onde  $\psi$  é a constante de fase da corrente. Essa potência (fig. 10.24) *oscila* periodicamente entre zero e o valor máximo  $I_m^2 R$ . Na prática, interessamos o *valor médio* da potência sobre um período (ou sobre muitos, o que vem a dar na mesma):

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = I_m^2 R \left\langle \cos^2(\omega t + \psi) \right\rangle \quad (10.6.30)$$

onde os colchetes angulares  $\langle \rangle$  indicam o *valor médio temporal*, definido, para qualquer função  $f(t)$ , por

$$\langle f(t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt' \quad (10.6.31)$$

e  $T$  é qualquer número inteiro de períodos.

É óbvio que (fig. 10.24)

$$\langle \cos^2(\omega t + \psi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \psi) \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \psi) + \sin^2(\omega t + \psi) \rangle}_{=1}$$

ou seja,

$$\langle \cos^2(\omega t + \psi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \psi) \rangle = \frac{1}{2} \quad (10.6.32)$$

o que também decorre da identidade

$$\langle \cos^2(\omega t + \psi) \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 + \cos(2\omega t + 2\psi) \rangle \quad (10.6.33)$$

com

$$\langle \cos(2\omega t + 2\psi) \rangle = 0 \quad (10.6.34)$$

(áreas positivas e negativas da cossenóide se cancelam).

Logo,

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} I_m^2 R \equiv (I_e)^2 R \quad (10.6.35)$$

onde

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \equiv 0,707 I_m \quad (10.6.36)$$

chama-se *valor efetivo*, ou *valor eficaz*, da corrente. Um resultado análogo vale para a voltagem:

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Quando se diz que a voltagem de uma linha de 60 ~ é de 110 V, este é o *valor eficaz*: o valor máximo correspondente é  $110\sqrt{2} \approx 156 \text{ V } (= V_m)$ .

Analogamente, para qualquer circuito AC, se a fem da fonte (gerador) que o alimenta é

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = V(t) = V_m \cos(\omega t)} \quad (10.6.37)$$

e se a corrente gerada no circuito é

$$\boxed{I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)} \quad (10.6.38)$$

a potência *instantânea* fornecida ao circuito é

$$\boxed{P(t) = \mathcal{E}(t) I(t) = V_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)} \quad (10.6.39)$$

Novamente, interessa a potência *média*  $\langle P(t) \rangle$ .

Como

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi + \sin(\omega t) \sin \varphi$$

vem

$$\langle P(t) \rangle = V_m I_m \left[ \cos \varphi \underbrace{\langle \cos^2(\omega t) \rangle}_{=\frac{1}{2}} + \sin \varphi \underbrace{\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle}_{=\frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0} \right]$$

ou seja,

$$\boxed{\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \varphi} \quad (10.6.40)$$

Além dos valores máximos da voltagem e da corrente, vemos que  $\langle P \rangle$  também depende da *defasagem*  $\varphi$  entre elas. O fator  $\cos \varphi$  chama-se *fator de potência*.

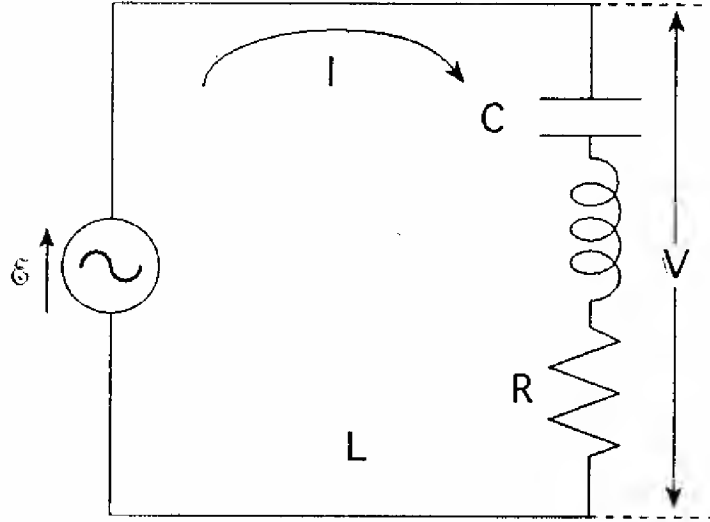
Assim, por exemplo, nos circuitos puramente reativos (que só contém  $L$  e/ou  $C$ , sem  $R$ ), vimos que  $\varphi = \pm \pi/2$ , de forma que  $\cos \varphi = 0$  e  $\langle P \rangle = 0$ . Esse resultado se interpreta imediatamente: nestes circuitos puramente *reativos*, a energia armazenada no indutor ou na bobina durante uma metade do ciclo é restituída à fonte de alimentação durante a outra metade.

Por outro lado, num circuito *puramente resistivo*, a voltagem e a corrente estão em fase, e  $\varphi = 0$ . Se  $R$  é a resistência total do circuito, obtemos, neste caso

$$(V_m = I_m R), \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

o que coincide com o resultado anterior. Vemos assim a interpretação física e a importância da defasagem  $\varphi$  entre  $V$  e  $I$ .

## 10.7 Ressonância: circuito R-L-C



A impedância complexa deste circuito, com  $R$ ,  $L$ ,  $C$  em série (fig. 10.25), é

$$\begin{aligned} Z &= R + i X_L - i X_C \\ &= R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned} \quad (10.7.1)$$

Figura 10.25 Circuito R-L-C com gerador AC

e temos, tomando  $\bar{V} = V_m$ ,

$$\bar{Z} = Z e^{i\varphi} \quad (Z = |\bar{Z}|), \quad \text{e} \quad V = V_m \cos(\omega t) \quad (10.7.2)$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{Re} \left( \frac{\bar{V}}{Z} e^{i\omega t} \right) = \text{Re} \left( \frac{V_m}{Z} e^{i(\omega t - \varphi)} \right) \\ &= \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (10.7.3)$$

de forma que

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (10.7.4)$$

Portanto, a corrente de pico (valor máximo)  $I_m$  produzida para uma dada voltagem de pico  $V_m$ , dada pelo gerador, varia com a frequência  $\omega$ . Para  $\omega \rightarrow 0$ , a reatância do capacitor domina (porque  $C$  equivale a um circuito aberto neste limite); para  $\omega \rightarrow \infty$ , é a reatância do indutor que é dominante (porque  $L$  se opõe a variações muito rápidas).

$$I_m \rightarrow \omega C V_m \quad \text{para} \quad \omega \rightarrow 0$$

$$I_m \rightarrow \frac{V_m}{\omega L} \quad \text{para} \quad \omega \rightarrow \infty$$

Como  $I_m$  é positivo e  $\rightarrow 0$  para  $\omega \rightarrow 0$  e para  $\omega \rightarrow \infty$ , tem de passar por um máximo.



O valor *máximo* de  $I_m/V_m$  ocorre para a frequência  $\omega$  tal que

$$\boxed{\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \left\{ \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \left\{ \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right. \right.} \quad (10.7.5)$$

ou seja, quando  $\omega$  é igual à *frequência de oscilação livre do circuito L-C*. Temos

$$\boxed{I_m(\omega_0) = \frac{V_m}{R}} \quad (10.7.6)$$

ou seja, para essa frequência, *a reatância se anula*, e a impedância equivale à resistência  $R$ :  $I_m/V_m$  é dado pela lei de Ohm.

Vamos estudar o comportamento de  $I_m(\omega)$  para  $\omega$  *próximo de*  $\omega_0$ . Para isto, notemos que

$$\begin{aligned} R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 &= R^2 \left\{ 1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 L - \frac{\omega_0}{\omega \cdot \omega_0 C} \right)^2 \right\} \\ &= R^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega \cdot \underbrace{\omega_0^2 LC}_{=1}} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

e que

$$\boxed{\frac{\omega_0 L}{R} = Q} \quad (10.7.7)$$

é o *fator de mérito* (qualidade) associado à frequência angular  $\omega_0$ . Logo,

$$\boxed{I_m = \frac{V_m / R}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}} \quad (10.7.8)$$

Como  $I_m/V_m \rightarrow 0$  para  $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$  e é máximo para  $\omega = \omega_0$ , tem um *pico* em  $\omega_0$ . Para medir a *largura* desse pico, podemos tomar os valores de  $\omega$  para os quais  $I_m$  cai a  $1/\sqrt{2}$  do seu valor máximo  $V_m/R$ , ou seja,

$$Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 1 \quad \left\{ \quad \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} \right.$$

o que dá, para o *desvio*  $\Delta \omega \equiv \omega - \omega_0$  da frequência  $\omega_0$ ,

$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right] \frac{1}{Q}} \quad (10.7.9)$$

Em particular, se  $Q \gg 1$ , temos

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$$

e  $\omega \approx \omega_0$ , ou seja

$$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cong \pm \frac{1}{2Q} = \pm \frac{R}{2L\omega_0}} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = \pm \frac{\gamma}{2}, \quad \gamma \equiv \frac{R}{L}} \quad (10.7.10)$$

onde  $\gamma$  é o *fator de amortecimento* (10.5.4) das oscilações livres do circuito R-L-C.

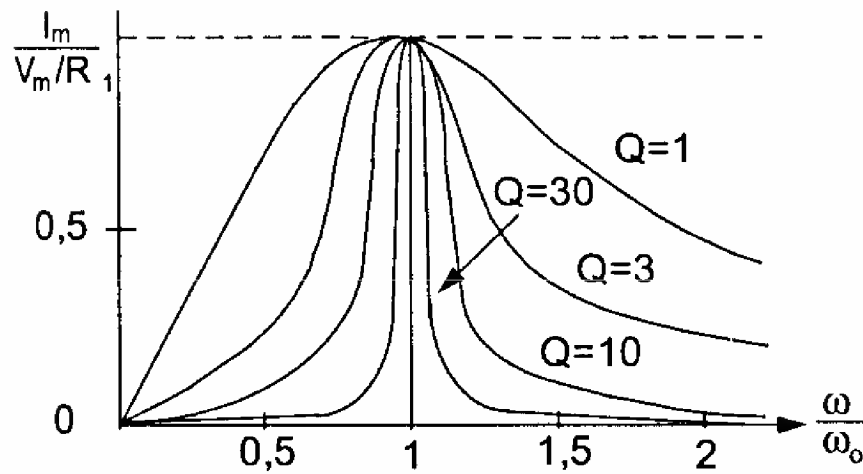


Figura 10.26 Curvas de ressonância para a amplitude

A energia eletromagnética nas oscilações livres cai com  $e^{-\gamma t}$ . A fig. 10.26 mostra a resposta, dividida pela resposta máxima, como função de  $\omega/\omega_0$ . Temos típicas *curvas de ressonância*, com picos tanto mais estreitos quanto maior for  $Q$ . Vemos também que a *semi-largura* do pico de ressonância, para  $Q \gg 1$ , é dada pelo fator de amortecimento  $\gamma$  das oscilações livres. Resultados inteiramente análogos são obtidos na mecânica, para oscilações forçadas (*Física Básica 2*).

A *defasagem*  $\varphi$  entre corrente e voltagem resulta da expressão de  $\bar{Z}$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{\omega_0 L}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\boxed{\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} \quad (10.7.11)$$

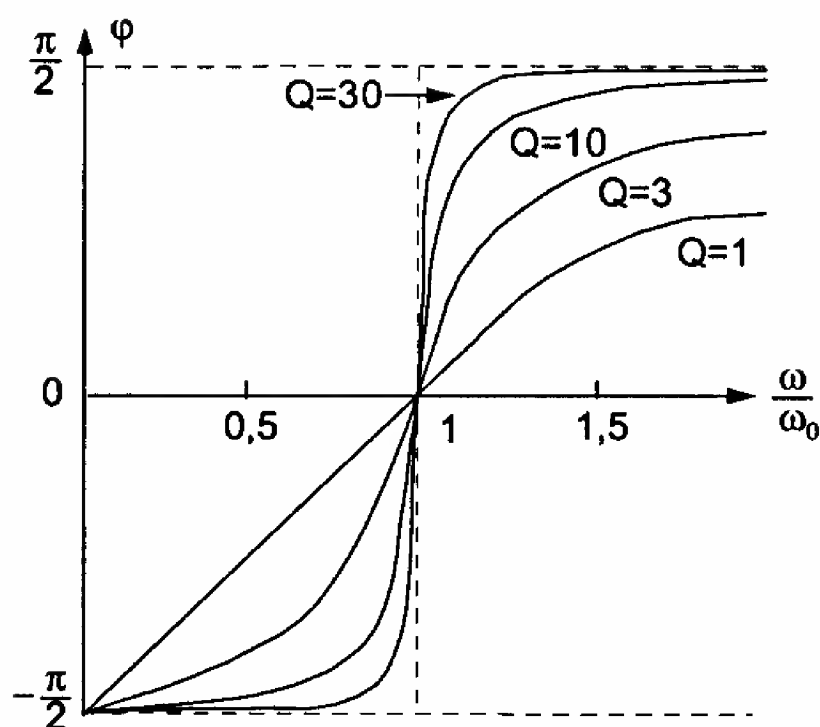


Figura 10.27 Curvas de ressonância para a fase

Vemos que  $\varphi = 0$  na ressonância, e  $\rightarrow -\pi/2$  para  $\omega \rightarrow 0$  (reatância capacitiva) e a  $+\pi/2$  para  $\omega \rightarrow \infty$  (reatância indutiva), tanto mais abruptamente quanto maior for  $Q$  (fig. 10.27).

Finalmente, vamos calcular a queda de tensão através do capacitor, que é dada pela (10.6.16):

$$V_{C,m} = I_m X_C = \frac{I_m}{\omega C} \quad (10.7.12)$$

ou seja,

$$V_{C,m} = \frac{V_m}{\omega RC \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (10.7.13)$$

Mas

$$\omega RC = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{R}{\omega_0 L} \cdot \omega_0^2 LC = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$$

o que dá

$$V_{C,m} = \frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{V_m}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (10.7.14)$$

e, em ressonância ( $\omega = \omega_0$ ),

$$V_{C,m} = QV_m \quad (10.7.15)$$

Para uma *ressonância estreita* ( $Q \gg 1$ ), a amplitude da tensão ressonante no capacitor é muito maior do que a amplitude da excitação externa  $V_m$  (por um fator  $= Q$ ).

Uma aplicação importante de um circuito ressonante é como *seletor de frequências*. Num receptor de rádio, por exemplo, podemos usar um circuito deste tipo em que  $C$  é *variável* (o que se obtém com um conjunto de placas fixas em paralelo e outro de placas móveis, que interpenetram as primeiras com área variável, pela rotação do botão

de sintonia). Quando a frequência  $\omega_0$  assim definida está em ressonância com a de uma estação de rádio, aparece no capacitor uma voltagem ressonante elevada, para  $Q$  elevado, e a *seletividade* também é alta, porque outras estações caem fora da largura  $\gamma$  do pico de ressonância.

## 10.8 Transformadores

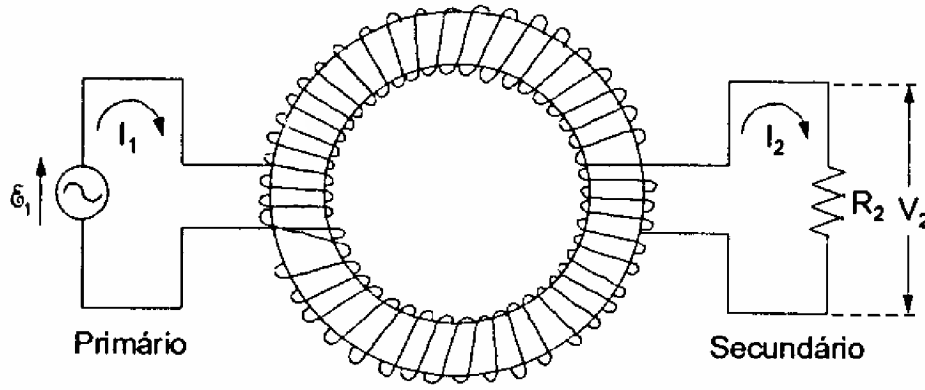


Figura 10.28 Bobinas toroidais acopladas

Consideremos inicialmente, para simplificar, a situação ilustrada na fig. 10.28, em que temos duas bobinas toroidais enroladas no mesmo toróide, feito de material não-magnético (madeira, por exemplo): um "enrolamento primário" com  $N_1$  espiras e um "secundário" com  $N_2$  espiras.

O primário é alimentado por um gerador de fem  $\varepsilon_1 = \varepsilon_m \cos(\omega t)$  e no secundário há uma "carga" de resistência  $R_2$ . Vamos desprezar a resistência do primário. Se  $L_1$  e  $L_2$  são as auto-indutâncias do primário e do secundário, e  $L_{12}$  a indutância mútua, temos então

$$\begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} &= \varepsilon_1 \\ L_{12} \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10.8.1)$$

ou, em notação complexa,

$$\begin{aligned} i\omega (L_1 \bar{I}_1 + L_{12} \bar{I}_2) &= \bar{\varepsilon}_1 \\ i\omega (L_{12} \bar{I}_1 + L_2 \bar{I}_2) &= R_2 \bar{I}_2 = -\bar{V}_2 \end{aligned} \quad (10.8.2)$$

onde  $V_2 = \text{Re}(\bar{V}_2 e^{i\omega t})$  é a voltagem através da resistência.

Logo,

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{\varepsilon}_1} = - \left( \frac{L_{12} \bar{I}_1 + L_2 \bar{I}_2}{L_1 \bar{I}_1 + L_{12} \bar{I}_2} \right) \quad (10.8.3)$$

Vamos considerar o caso ideal em que o *coeficiente de acoplamento indutivo* é  $k = 1$  [cf. (9.6.6)], ou seja,

$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (10.8.4)$$

Neste caso,

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{\mathcal{E}}_1} = - \left( \frac{\sqrt{L_1 L_2} \bar{I}_1 + L_2 \bar{I}_2}{L_1 \bar{I}_1 + \sqrt{L_1 L_2} \bar{I}_2} \right) = - \frac{\sqrt{L_2} (\sqrt{L_1} \bar{I}_1 + \sqrt{L_2} \bar{I}_2)}{\sqrt{L_1} (\sqrt{L_1} \bar{I}_1 + \sqrt{L_2} \bar{I}_2)}$$

o que dá

$$-\frac{\bar{V}_2}{\bar{\mathcal{E}}_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{V_{2,m}}{\mathcal{E}_{1,m}} \quad (10.8.5)$$

pois o 2.º membro é real e positivo.

Mas vimos para bobinas toroidais [cf. (9.5.29)] que

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

é a razão do número de espiras do secundário ao número de espiras do primário.

Logo, a fem do primário aparece no secundário (através da carga) amplificada ou reduzida por esta razão, o que ilustra o princípio básico do transformador. Passando ao limite em que o raio médio do toróide  $\rightarrow \infty$ , obteríamos o mesmo resultado para um solenóide cilíndrico.

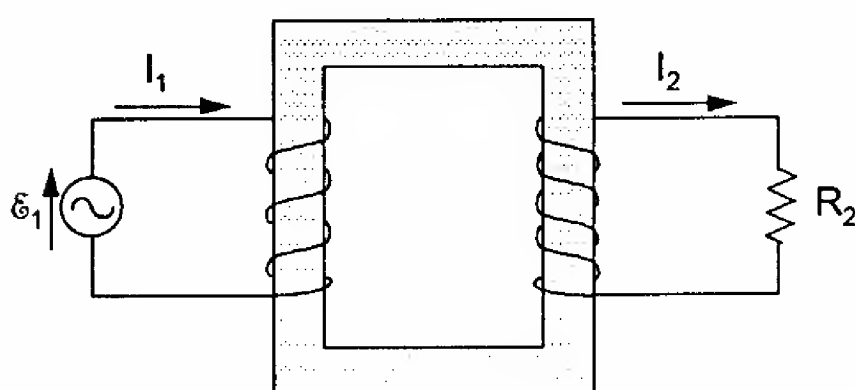


Figura 10.29 Transformador

Na prática, um transformador mais usual é do tipo ilustrado na fig. 10.29, em que primário e secundário são enrolados em torno de um mesmo núcleo de ferro. Neste caso, o fluxo magnético passa quase inteiramente através do ferro, e daí resulta que o fluxo magnético  $\Phi$  que atravessa cada espira é, com boa aproximação, o mesmo no primário e no secundário (cf. Seq. 11.8).

Como o primário tem  $N_1$  espiras e o secundário  $N_2$ , a lei da indução dá então

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= N_1 \frac{d\Phi}{dt} \\ R I_2 &= V_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad (10.8.6)$$

de forma que obtemos novamente

$$\boxed{\frac{V_2}{\mathcal{E}_1} = -\frac{N_2}{N_1}} \quad (10.8.7)$$

No caso das bobinas toroidais, a hipótese de que vale o limite ideal  $k = 1$  equivale a dizer que todo o fluxo que atravessa um dos enrolamentos também atravessa o outro, ou seja, o princípio é o mesmo.

## 10.9 Filtros

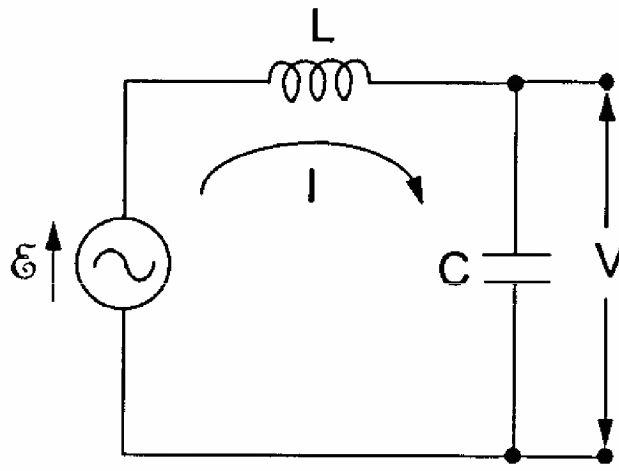


Figura 10.30 Circuito bloqueador de altas frequências

Se considerarmos o circuito da fig. 10.30, onde  $\mathcal{E}$  é a fem associada a um gerador de corrente alternada, teremos

$$\boxed{\bar{I} = \frac{\mathcal{E}}{\bar{Z}}} \quad (10.9.1)$$

onde

$$\boxed{\bar{Z} = i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (10.9.2)$$

e a voltagem  $V$  entre os terminais do capacitor é tal que

$$\bar{V} = \bar{I} \bar{Z}_C = \frac{\bar{I}}{i\omega C} = \frac{\mathcal{E}}{i\omega C \bar{Z}} = -\frac{\mathcal{E}}{\omega C \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\mathcal{E}}{(1 - \omega^2 LC)}$$

ou seja, com  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (frequência de oscilação livre),

$$\boxed{\bar{V} = \frac{\mathcal{E}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad (10.9.3)$$

que  $\rightarrow \mathcal{E}$  para  $\omega \rightarrow 0$  e  $\rightarrow 0$  para  $\omega \rightarrow \infty$ .

Assim, o circuito tende a "deixar passar" sinais de baixa frequência (para os quais  $L$  tende a um curto-circuito) e a "bloquear" sinais de alta frequência (efeito de  $L$  e da lei de Lenz).

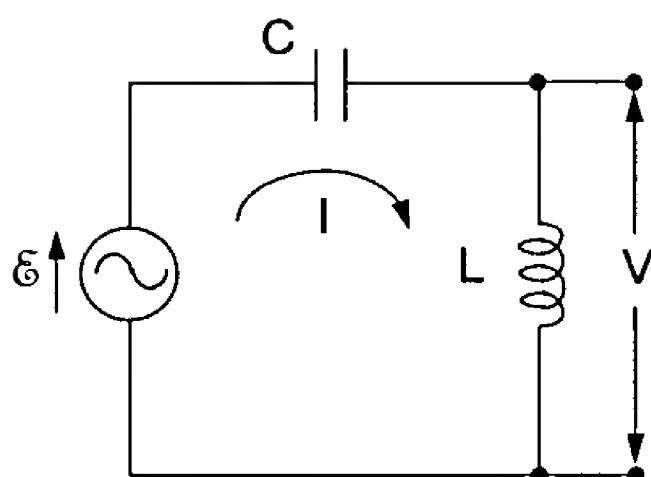


Figura 10.31 Circuito bloqueador de baixas frequências

Se intercambiarmos os papéis de  $L$  e  $C$ ,  $\bar{Z}$  e  $\bar{I}$  não se alteram (fig. 10.31), mas  $V$  aparece agora entre os terminais do indutor, e

$$\bar{V} = \bar{I} \bar{Z}_L = i\omega L \bar{I} = \frac{i\omega L}{\bar{Z}} \bar{\epsilon} = \frac{i\omega L}{i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \bar{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)} \bar{\epsilon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{V} = \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \end{array} \right. \quad (10.9.4)$$

que  $\rightarrow \bar{\epsilon}$  para  $\omega \rightarrow \infty$  e  $\rightarrow 0$  para  $\omega \rightarrow 0$ .

O circuito tem agora o efeito inverso, deixando passar sinais de alta frequência (para os quais  $C$  tende a um curto-circuito) e bloqueando os de baixa frequência (para os quais  $C$  é um circuito aberto).

Podemos procurar aumentar estas tendências e "filtrar" mais e mais frequências baixas (ou altas) associando em série vários circuitos idênticos a um dos dois casos.

Vejamos o que acontece no caso limite idealizado em que se imagina ter uma sequência *infinita* de circuitos idênticos, formando uma rede *periódica*.

Para dar um tratamento geral, substituímos  $L$  e  $C$  por duas impedâncias complexas genéricas, que vamos designar por  $\bar{Z}_1$  e  $\bar{Z}_2$ :

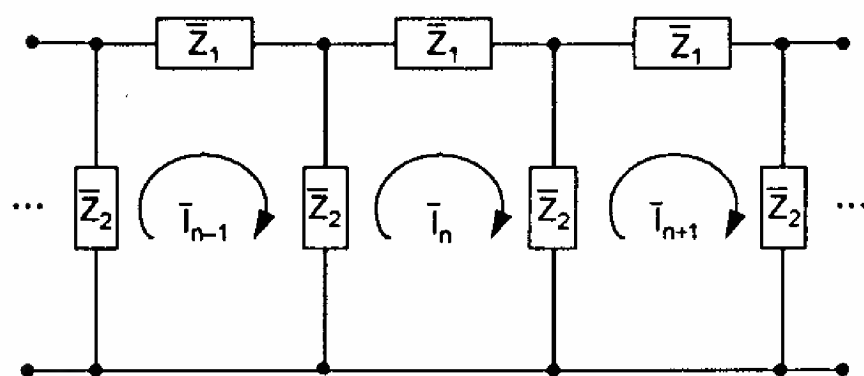


Figura 10.32 Filtro infinito

Seja  $\bar{I}_n$  a corrente de malha complexa na  $n$ -ésima malha dessa rede (fig. 10.32). Aplicando a 1.<sup>a</sup> lei de Kirchhoff a esta malha, vem:

$$(\bar{I}_n - \bar{I}_{n-1}) \bar{Z}_2 + \bar{I}_n \bar{Z}_1 + (\bar{I}_n - \bar{I}_{n+1}) \bar{Z}_2 = 0 \quad (10.9.5)$$

ou seja

$$-\bar{Z}_2 \bar{I}_{n+1} + (\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_2) \bar{I}_n - \bar{Z}_2 \bar{I}_{n-1} = 0 \quad (10.9.6)$$

Dados  $\bar{Z}_1$  e  $\bar{Z}_2$ , queremos achar de que forma  $\bar{I}_n$  depende de  $n$ , variável *discreta* que toma só valores inteiros. A diferença  $\bar{I}_n - \bar{I}_{n-1} = \Delta \bar{I}_n$  chama-se uma *diferença finita*, análogo discreto de uma *diferencial*:  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ , e a equação (10.9.6) é uma *equação de diferenças finitas*, análogo discreto de uma equação diferencial.

Como os coeficientes das diferenças são constantes, podemos procurar resolvê-la da mesma forma que uma equação diferencial linear de coeficientes constantes, por uma exponencial na variável ( $n$ ):

$$\bar{I}_n = \bar{I}_0 e^{\alpha n} \quad (10.9.7)$$

onde  $\alpha$  é uma constante a determinar. Isso dá

$$\begin{aligned} \bar{I}_{n+1} &= e^{\alpha} \bar{I}_n \equiv p \bar{I}_n \quad (p \equiv e^{\alpha}) \\ \bar{I}_{n-1} &= e^{-\alpha} \bar{I}_n \equiv \frac{1}{p} \bar{I}_n \end{aligned} \quad (10.9.8)$$

e, substituindo na (10.9.6)

$$-p \bar{Z}_2 + (\bar{Z}_1 + 2\bar{Z}_2) - \frac{1}{p} \bar{Z}_2 = 0$$

Multiplicando por  $(-p)$  e dividindo por  $\bar{Z}_2$ , obtemos

$$p^2 - 2\left(1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}\right)p + 1 = 0 \quad (10.9.9)$$

cujas raízes são

$$p_{\pm} = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}\right)^2 - 1} \quad (10.9.10)$$

Vemos pelos coeficientes da equação de 2.<sup>o</sup> grau (10.9.9) que

$$p_+ p_- = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} p_- = \frac{1}{p_+} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_+ = e^{\alpha} \Rightarrow p_- = e^{-\alpha} \end{array} \right. \quad (10.9.11)$$



e que, para ambas as raízes, temos

$$\boxed{\frac{1}{2} \left( p + \frac{1}{p} \right) = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}} \quad (10.9.12)$$

Nos exemplos acima,  $\bar{Z}_1$  e  $\bar{Z}_2$  são  $i\omega L$  ou

$$\left( \frac{-i}{\omega C} \right)$$

ou seja, imaginários puros, de forma que

$$\frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}$$

é *real*. Vamos admitir isso, ou seja, que  $\bar{Z}_1$  e  $\bar{Z}_2$  são *reatâncias puras* ( $R = 0$ ). Se

$$\left( 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2} \right)^2 < 1$$

o *radical* em  $p_{\pm}$  é *imaginário puro* e as raízes são *complexas conjugadas*; caso contrário, elas são reais. Começemos pelo 1.º caso:

$$\left( 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2} \right)^2 < 1 \quad \left\{ \quad -1 < 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2} < 1 \quad \left\{ \quad \boxed{-1 < \frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} < 0} \right. \right. \quad (10.9.13)$$

Nesse caso,  $p_- = (p_+)^*$  (complexo conjugado), e  $1 = p_+ p_- = |p_+|^2$ . Logo,  $p_{\pm}$  são *fatores de fase*; a (10.9.8) dá

$$\boxed{\bar{I}_{n+1} / \bar{I}_n = p_{\pm} = e^{\pm i\beta}} \quad (10.9.14)$$

onde  $\beta$  (defasagem da corrente entre 2 malhas consecutivas) se obtém da (10.9.12):

$$\frac{1}{2} \left( p + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{2} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) = \boxed{\cos\beta = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}} \quad (10.9.15)$$

o que dá

$$\beta = \cos^{-1} \left( 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2} \right)$$

A corrente complexa na malha  $n$  fica, para a raiz  $p_-$ ,

$$\bar{I}_n = \bar{I}_0 e^{-i\beta n}$$

ou seja,

$$\hat{I}_n = \bar{I}_0 e^{-i(\omega t - \beta n)} \quad (10.9.16)$$

e, como  $\bar{I}_0 = \bar{I}_{0m} e^{i\varphi}$ , a corrente real é

$$I_n = I_{0m} \cos(\beta n - \omega t - \varphi) \quad (10.9.17)$$

que representa uma *onda harmônica progressiva* (*Física Básica 2*, Seç. 5.2) de corrente, propagando-se ao longo da cadeia de malhas, da esquerda para a direita, com "número de onda"  $\beta$  e velocidade de propagação  $\omega/\beta$ .

A raiz  $p_+$  troca  $\beta \rightarrow -\beta$ , e representa portanto uma onda análoga propagando-se da direita para a esquerda. A solução geral nesse caso seria uma superposição das duas.

Se

$$\left(1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2}\right)^2 > 1$$

a expressão entre parênteses pode ser  $> 1$  ou  $< -1$ .

*Caso (i):*

$$\frac{Z_1}{4\bar{Z}_2} > 0 \quad (10.9.18)$$

Neste caso,  $p_+ > 1 = e^\alpha$  com  $\alpha > 0$ , e  $p_- < 1 = e^{-\alpha}$ , onde

$$\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = \text{ch } \alpha \doteq 1 + \frac{\bar{Z}_1}{2\bar{Z}_2} \quad (10.9.19)$$

e  $\text{ch}$  é o coseno hiperbólico.

Para a raiz  $p_-$ , a corrente na malha  $n$  é

$$\bar{I}_n = \bar{I}_0 e^{-\alpha n} \quad \left\{ \quad \hat{I}_n = \bar{I}_0 e^{-\alpha n + i\omega t} \right. \quad (10.9.20)$$

e a corrente real é

$$\bar{I}_n = \bar{I}_{0m} e^{-\alpha n} \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.9.21)$$

mostrando que ela não se propaga: *atenua-se* para a direita, por um fator  $e^{-\alpha}$ , de cada malha para a seguinte. Essa solução corresponderia a um gerador de corrente à esquerda, alimentando a rede. A solução  $p_+ = e^\alpha$  *atenua-se* para a esquerda, correspondendo à

alimentação por um gerador de corrente colocado à direita;  $\alpha$  é a *constante de atenuação por seção*.

Caso (ii):

$$1 + \frac{\bar{Z}_2}{2\bar{Z}_1} < -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} < -1 \end{array} \right. \quad (10.9.22)$$

Nesse caso,  $p_+$  e  $p_-$  são negativos, e podemos tomar

$$p_{\pm} = -e^{\pm\alpha} (\alpha > 0) \quad (10.9.23)$$

A única diferença em relação ao caso (i) é que, além de atenuar-se de cada seção para a seguinte, a corrente também troca de sinal (sentido), correspondendo a uma mudança de fase de  $\pi$ .

Em geral,

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

é uma função da frequência  $\omega$ , como as reatâncias, de modo que as condições acima são *condições sobre*  $\omega$ . Uma faixa de frequências em que a corrente se propaga

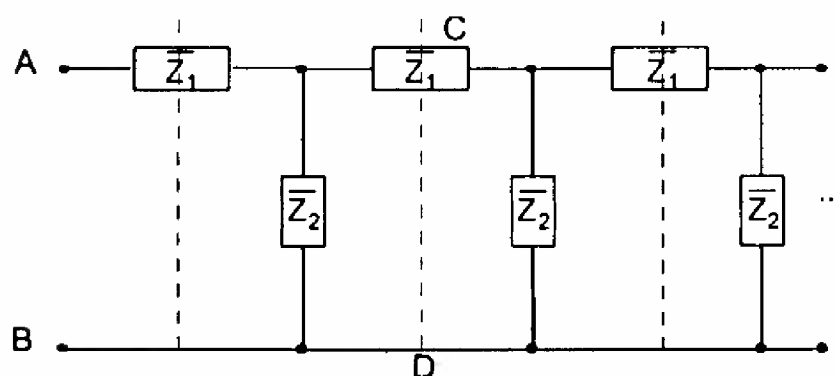
$$\left( -1 < \frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} < 0 \right)$$

chama-se *banda de passagem*; nos outros casos (i) e (ii), em que se atenua, temos uma *banda proibida*.

Como pode haver atenuação, se  $\bar{Z}_1$  e  $\bar{Z}_2$  são reatâncias puras, cuja resistência  $R$  foi desprezada? A resposta é que a *atenuação* não corresponde aqui a uma *dissipação* de energia. A energia proveniente da fonte de corrente, numa banda proibida, vai ficando *acumulada* nos capacitores e indutores ao longo da rede, sem que haja dissipação. Em consequência,  $I_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ .

### Impedância iterativa

Na realidade, não existem filtros infinitos. Como então aplicar esses resultados?



Podemos imaginar a cadeia como formada pela justaposição de elementos idênticos, obtidos "cortando ao meio" cada seção, ou seja, atribuindo  $1/2 \bar{Z}_1$  a cada lado (fig. 10.33).

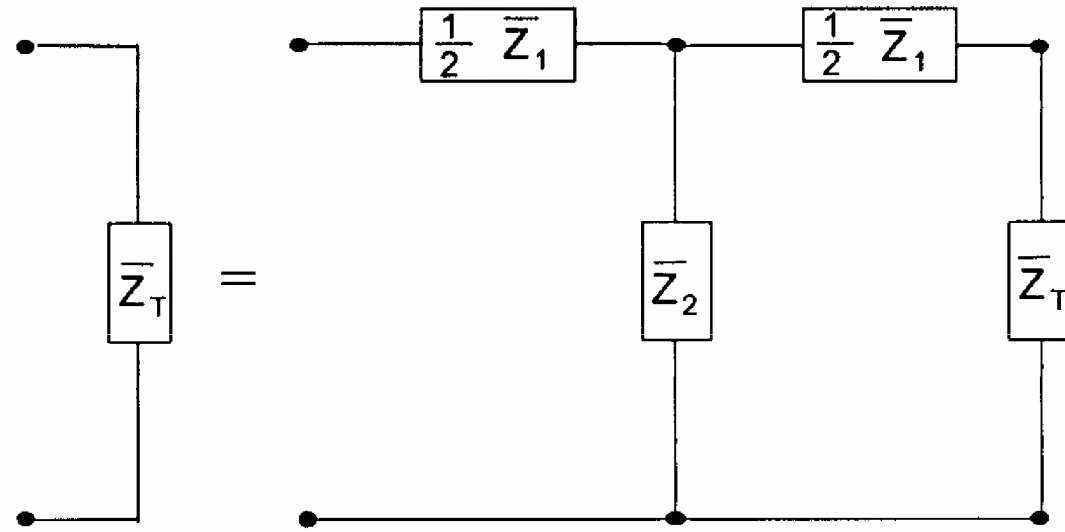
Figura 10.33 Redivisão de filtro infinito

Se tivermos um gerador de voltagem  $\bar{V}$  na extremidade esquerda do filtro, entre os pontos  $A$  e  $B$ , a corrente transmitida será (digamos)  $\bar{I}$ . A razão

$$\boxed{\bar{V} / \bar{I} = Z_T} \quad (10.9.24)$$

chama-se *impedância iterativa* ou *impedância característica* do filtro. Podemos calculá-la através do seguinte raciocínio.

Do ponto de vista de  $A$  e  $B$ , podemos substituir o filtro todo pela "impedância equivalente"  $Z_T$ , mas isto também se aplica (uma vez que ele é semi-infinito) se substituirmos somente a porção à direita dos pontos  $C$  e  $D$ . Logo, devemos ter:



ou seja, levando em conta as associações em série e em paralelo,

$$\boxed{\bar{Z}_T = \frac{1}{2} \bar{Z}_1 + \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\frac{1}{2} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_T}}} \quad (10.9.25)$$

o que dá

$$\bar{Z}_T = \frac{\bar{Z}_1}{2} + \frac{\bar{Z}_2 \left( \frac{\bar{Z}_1}{2} + \bar{Z}_T \right)}{\frac{\bar{Z}_1}{2} + \bar{Z}_T + \bar{Z}_2}$$

$$\therefore \bar{Z}_T \frac{\bar{Z}_1}{2} + (\bar{Z}_T)^2 + \bar{Z}_T \bar{Z}_2 = \left( \frac{\bar{Z}_1}{2} \right)^2 + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_T}{2} + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{2} + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{2} + \bar{Z}_2 \bar{Z}_T$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{Z}_T = \sqrt{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + \frac{1}{4} (\bar{Z}_1)^2} = \sqrt{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2} \sqrt{1 + \frac{\bar{Z}_1}{4 \bar{Z}_2}}} \quad (10.9.26)$$

Se conseguíssemos realizar fisicamente uma impedância desse valor para *todas* as frequências  $\omega$ , bastaria empregá-la para terminar um número finito de seções do filtro para que ele se comportasse como se fosse semi-infinito. Na prática, isto em geral só pode ser

feito de forma *aproximada*, em alguns domínios da frequência, conforme será discutido nos exemplos a seguir.

Quando a impedância terminal se afasta de  $\bar{Z}_T$ , é gerada uma *onda refletida*, que se propaga em sentido oposto.

### Exemplos

#### (a) Filtro transmissor de baixas frequências

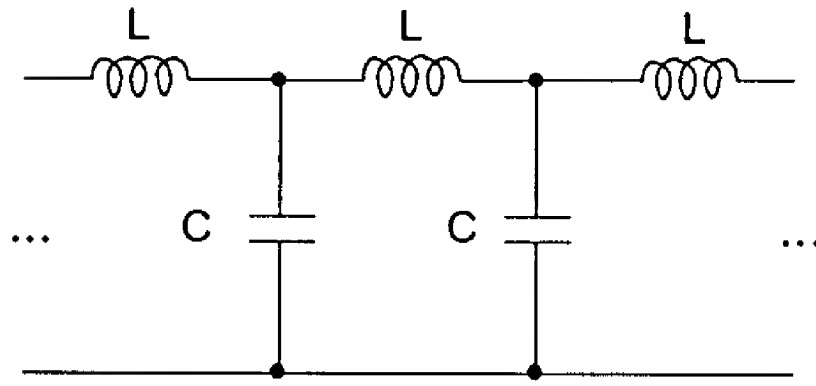


Figura 10.34 Filtro transmissor de baixas frequências

Obtém-se iterando os elementos da fig. 10.30 (fig. 10.34)

Temos então

$$\bar{Z}_1 = i \omega L$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{1}{i \omega C}$$

$$\frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} = -\frac{1}{4} \omega^2 LC$$

$$\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 = L / C$$

(10.9.27)

ou ainda,

$$\frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 0$$

onde

$$\omega_0 \equiv \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

(10.9.28)

Assim, a *região de passagem* (propagação) corresponde a

$$-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} > -1 \quad \left\{ \quad 0 \leq \omega \leq \omega_0 \right\} \quad (10.9.29)$$

justificando o nome do filtro (*passa* as baixas frequências e bloqueia as altas, acima de  $\omega_0$ );  $\omega_0$  chama-se a *frequência de corte* (é o dobro da frequência ressonante do circuito  $L$ - $C$ ).

Na *região de passagem*, o número de onda  $\beta$  é dado por

$$\cos \beta = 1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

(10.9.30)

de modo que  $\beta$  varia de 0 a  $\pi$  quando  $\omega$  varia de 0 a  $\omega_0$ .

Na *região de atenuação* ( $\omega > \omega_0$ ), a constante de atenuação  $\alpha$  é dada por

$$\left[ \frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < -1, \text{ caso (ii)} \right]$$

$$-\operatorname{ch} \alpha = 1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch} \alpha = 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \end{array} \right. \quad (10.9.31)$$

A impedância iterativa é

$$\bar{Z}_T = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4} \omega^2 L^2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}_T = \sqrt{\frac{L}{C} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \end{array} \right. \quad (10.9.32)$$

Na banda de passagem,  $\bar{Z}_T$  é real e pode ser aproximado por uma *resistência*

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.9.33)$$

para  $\omega \ll \omega_0$ . Já na banda de atenuação  $\bar{Z}_T$  teria de comportar-se como uma *reatância* (imaginário puro), com a dependência da frequência dada pela expressão acima.

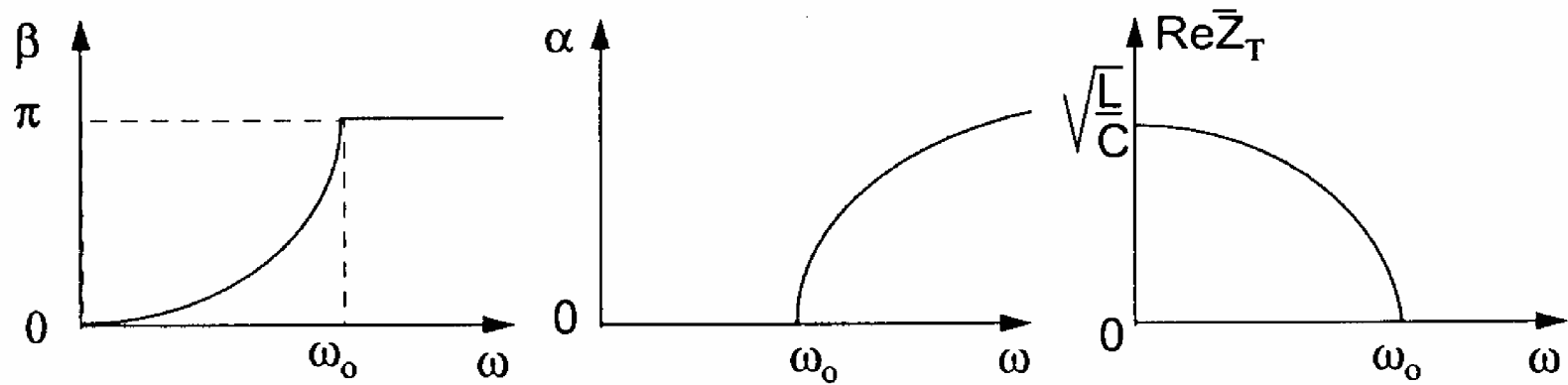


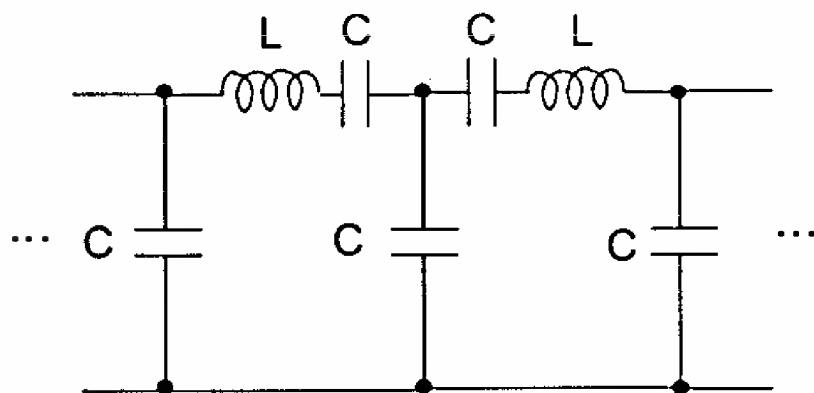
Figura 10.35 Gráficos de  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\operatorname{Re} \bar{Z}_T$

Os gráficos (fig. 10.35) dão os comportamentos de  $\beta$ ,  $\alpha$  e da parte real de  $\bar{Z}_T$  em função de  $\omega$  para esse filtro.

### (b) Filtro transmissor de altas frequências

O elemento básico é o da fig. 10.31. A discussão é análoga à do caso (a), e será deixada como exercício.

### (c) Filtro transmissor de banda



Um dos exemplos mais simples desse tipo de filtro está ilustrado na fig. 10.36.

Nesse caso, temos

Figura 10.36 Filtro transmissor de banda

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 &= i\omega L - \frac{i}{\omega C} = i\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) \\ \bar{Z}_2 &= -\frac{i}{\omega C} \quad \left\{ \quad \frac{1}{\bar{Z}_2} = i\omega C \right. \end{aligned} \quad (10.9.34)$$

o que dá

$$\frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} = -\frac{1}{4}\omega^2 LC \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) = \frac{1}{4}(1 - \omega^2 LC) \quad (10.9.35)$$

que é  $> 0$  para  $\omega = 0$  [caso (i) de atenuação] e  $\rightarrow -\infty$  para  $\omega \rightarrow \infty$  [caso (ii) de atenuação]. Assim,

$$\frac{\bar{Z}_1}{4\bar{Z}_2} < 0 \quad \text{para} \quad \omega > \omega_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.9.36)$$

e passa pelo valor  $-1$  para

$$\frac{1}{4}(1 - \omega^2 LC) = -1 \quad \left\{ \quad \omega^2 LC = 4 + 1 = 5 \quad \right\} \quad \left\{ \quad \omega = \omega_2 \equiv \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{LC}} \quad \right. \quad (10.9.37)$$

A banda de passagem é portanto, nesse caso,

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \equiv \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{LC}} \quad (10.9.38)$$

e frequências fora desta banda são atenuadas.

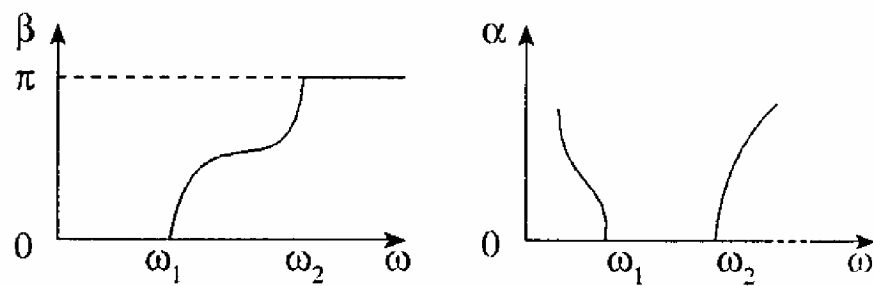


Figura 10.37 Comportamento de  $\beta$  e  $\alpha$  para o filtro transmissor de banda

O andamento de  $\beta$  é  $\alpha$  neste caso está ilustrado na fig. 10.37. Note que a defasagem permanece  $= \pi$  acima de  $\omega_2$  [caso (ii)].

### Aplicações

Os primeiros filtros elétricos foram construídos por Campbell em 1906.

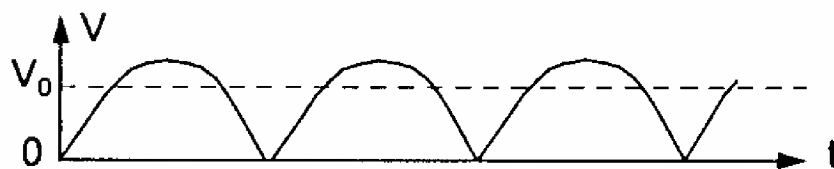


Figura 10.38 Sinal de componente DC igual a  $V_0$

Os filtros têm uma variedade de aplicações práticas. Assim, por exemplo, um gerador DC rotativo poderia gerar um sinal como o da fig. 10.38, que tem

um valor médio  $V_0 > 0$  constante (DC), mas contém oscilações de frequência associadas à rotação do gerador. Usando um filtro transmissor de baixa frequência, podemos atenuar bastante estas oscilações e "filtrar" um sinal bem mais próximo da constante  $V_0$ .

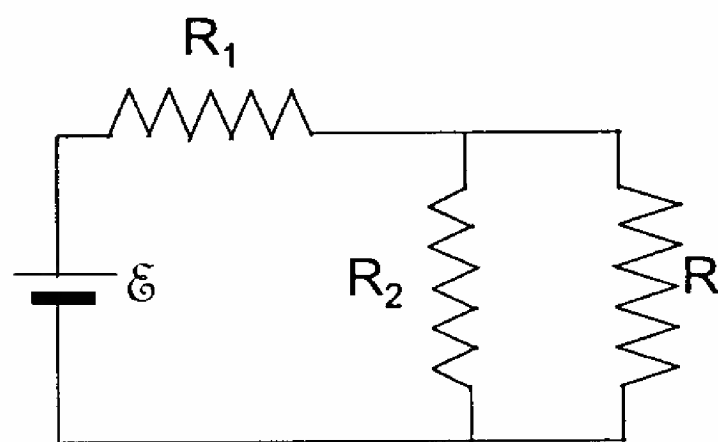
Num aparelho de som de alta fidelidade, o ruído devido à rotação do motor de um toca-discos, de baixa frequência, perturba o sinal proveniente da gravação; ele pode ser eliminado (atenuado) por um filtro transmissor de alta frequência.

Num cabo telefônico, pode-se usar um filtro transmissor de banda para selecionar somente um dos canais usados para transmissão da voz.

Finalmente, um filtro é uma *estrutura periódica*, e fornece uma excelente ilustração do resultado citado na Seção 6.6 sobre a propagação de ondas em estruturas periódicas: a existência de *bandas permitidas de frequência*, em que a transmissão de ondas é possível, separadas por *bandas proibidas*, em que as ondas não se propagam (há atenuação).

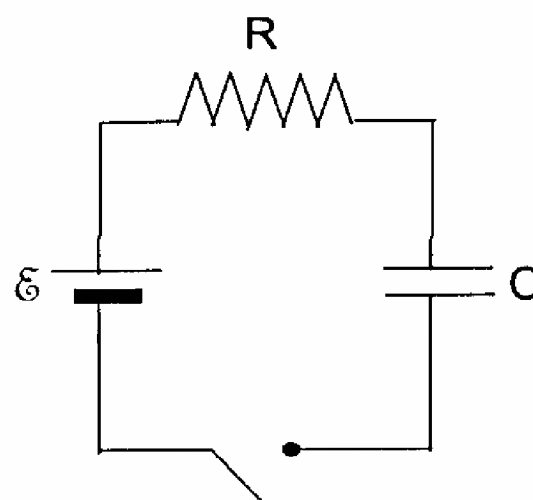
As bandas de energia dos elétrons nos cristais resultam de um efeito análogo, relacionado com a propagação das ondas associadas aos elétrons na teoria quântica, através da estrutura periódica da rede cristalina. Serão discutidas no Vol. 4 deste curso.

## PROBLEMAS

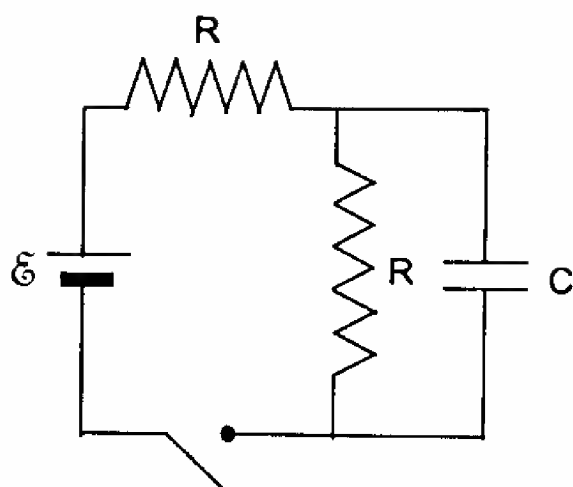


1. No circuito da figura,  $R_1 = 20 \, \Omega$  e  $R_2 = 60 \, \Omega$ . Para que valor de  $R$  a potência dissipada em  $R$  é afetada o mínimo possível por pequenas variações de  $R$ ?

2. No circuito da figura, a chave é ligada para  $t = 0$ , com o capacitor descarregado. Demonstre que, após um tempo muito longo, metade da energia fornecida pela bateria estará armazenada no capacitor, e a outra metade terá sido dissipada na resistência.

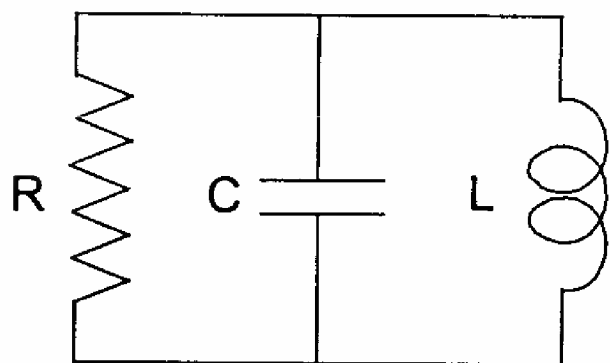
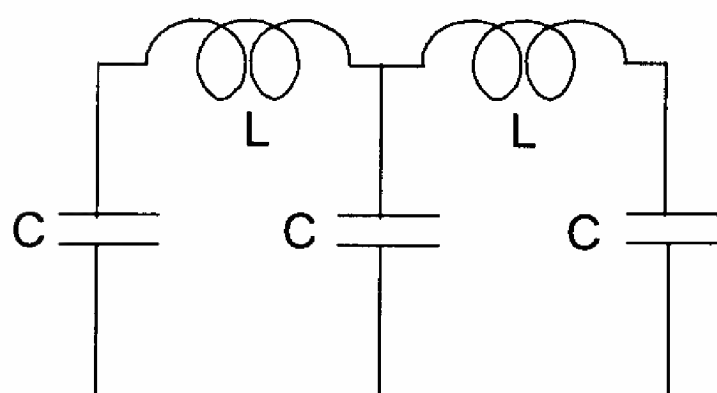






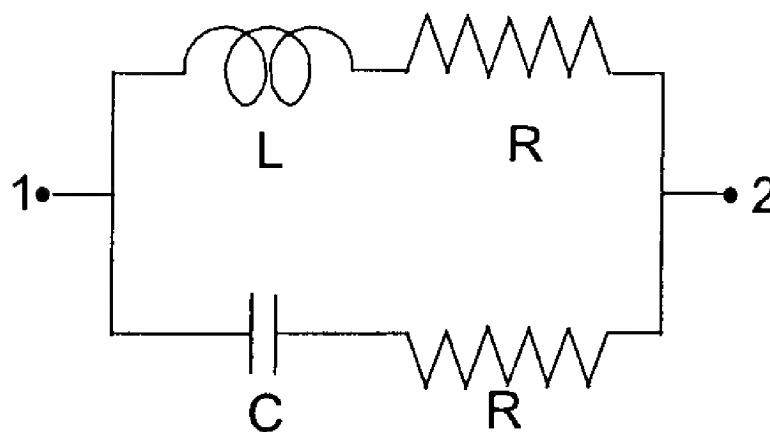
3. No circuito da figura, a chave é ligada para  $t = 0$ , com o capacitor descarregado. Calcule a voltagem  $V(t)$  através do capacitor após um tempo  $t$ .

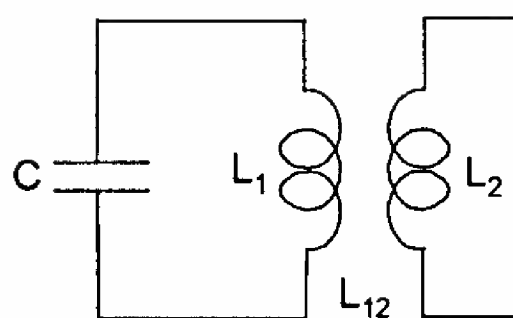
4. Demonstre que o circuito da figura tem duas frequências possíveis de oscilação livre, e calcule os valores dessas frequências.



5. No circuito RLC em paralelo (figura), (a) Calcule a frequência angular  $\omega_0$  das oscilações livres e a constante de amortecimento  $\gamma$ . (b) Para  $R = 10\text{ k}\Omega$ ,  $C = 1\text{ }\mu\text{F}$ ,  $L = 10\text{ mH}$ , qual é o valor de  $\omega_0$ ? Depois de quantos períodos a energia eletromagnética se reduz à metade do seu valor inicial?

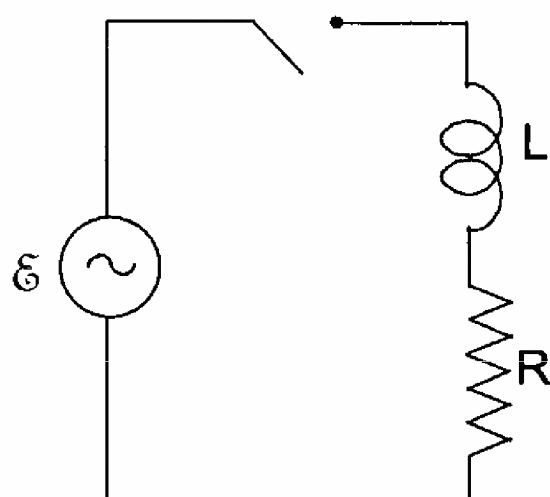
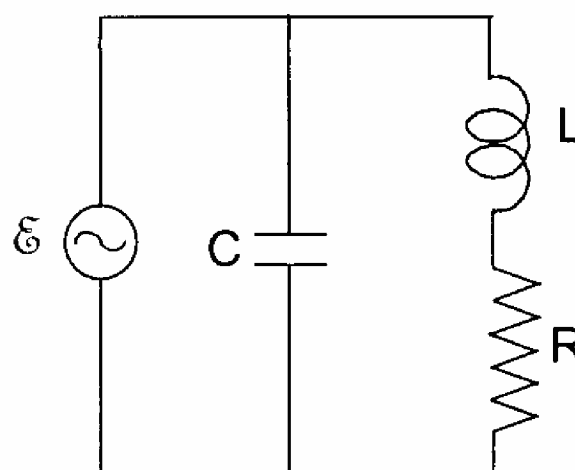
6. Calcule a impedância do circuito da figura entre os pontos 1 e 2 à frequência  $\omega$  e mostre que, se as constantes de tempo  $\tau_C$  e  $\tau_L$  forem iguais, a impedância será independente da frequência.





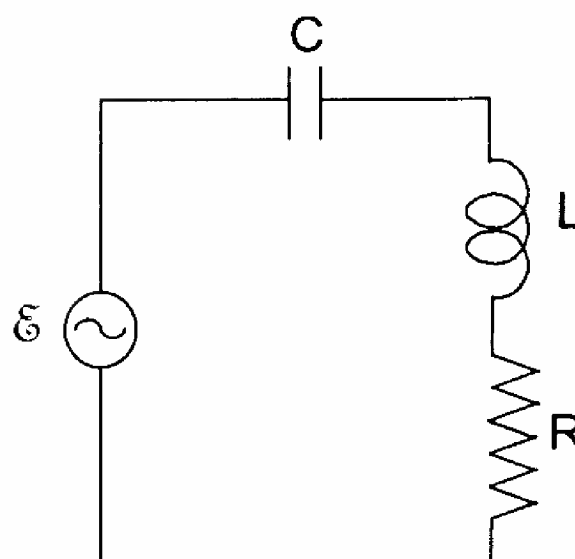
7. Calcule a frequência angular de oscilação livre do circuito da figura, onde  $L_{12}$  é a indução mútua entre as bobinas.

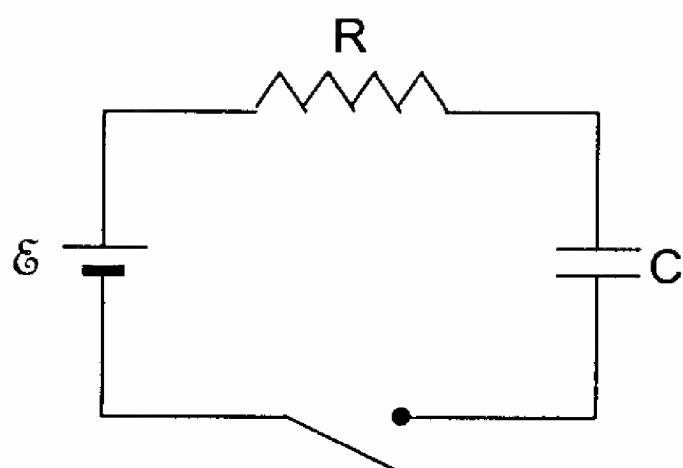
8. No circuito da figura,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ . Calcule a frequência angular de ressonância, definida como o valor de  $\omega$  para o qual a reatância do circuito se anula.



9. No circuito da figura, fecha-se a chave em  $t = 0$ , com  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$ . (a) Ache a corrente  $I(t)$ , incluindo o termo transiente e a solução estacionária. (b) Para que valor de  $\omega$  o transiente desaparece?

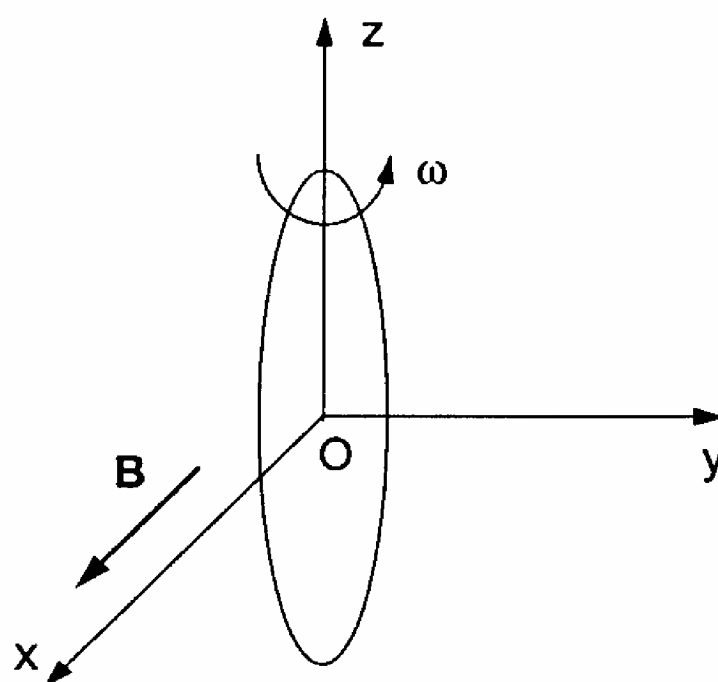
10. No circuito RLC em série (figura), com  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ , ache para que valor de  $\omega$  a amplitude da voltagem será máxima: (a) através do capacitor; (b) através da bobina.





11. No circuito da fig. ao lado, a chave é ligada em  $t = 0$ , com o capacitor descarregado.

- Ache a corrente  $I$  em função do tempo.
- Ache a energia armazenada em  $C$ , após um tempo muito longo.
- Ache a energia total fornecida pela bateria, durante esse tempo.
- Obtenha a energia total dissipada no resistor durante esse tempo. Mostre que a metade da energia fornecida estará armazenada no capacitor e a outra metade dela terá sido dissipada no resistor.



12. Uma espira circular de raio  $a$ , auto-indutância  $L$  e resistência  $R$  gira em torno do eixo  $z$  (fig. acima), com velocidade angular constante  $\omega$ , num campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$ .

- Calcule a fem  $\mathcal{E}$  e a corrente  $I$  induzida na espira, em regime estacionário (após um tempo longo).
- Calcule o vetor momento de dipolo magnético  $\mathbf{m}$  correspondente.
- Obtenha o torque (vetor)  $\boldsymbol{\tau}$  correspondente sobre a espira.

13. Um fio metálico isolado, de resistividade  $\rho$  e seção transversal de área  $S$ , é enrolado num cilindro de madeira de raio  $a$  e comprimento  $l$ , ficando com  $N$  espiras bem juntas umas das outras. As extremidades do fio estão ligadas a um gerador de corrente alternada de frequência angular  $\omega$ . Calcule:

- A resistência  $R$  do fio.
- A auto-indutância  $L$  do fio.
- A diferença de fase  $\phi$  entre a corrente  $I$  e a voltagem  $V$  através do fio.

# 1 1

# MATERIAIS MAGNÉTICOS

No capítulo 5, discutimos o que acontece com o campo elétrico no interior de um meio material: vimos que um meio dielétrico fica polarizado e que as cargas de polarização (volumétricas e superficiais) contribuem para  $E$ , reduzindo sua magnitude dentro do meio.

No presente capítulo, vamos discutir o análogo desses efeitos para campos magnéticos no interior da matéria. Embora haja analogias, há também diferenças importantes, devido ao fato de que não existem cargas magnéticas: as fontes do campo magnético são correntes.

Entretanto, há uma dificuldade básica, semelhante à que encontramos ao procurar um modelo microscópico para a condutividade elétrica: uma descrição na escala atômica requer a mecânica quântica. Aqui o problema é ainda mais grave: conforme veremos, se valesse a física clássica, não existiriam materiais magnéticos!

Apesar disso, é útil desenvolver o tratamento clássico (da mesma forma que foi útil o modelo da Seq. 6.4 da condutividade), porque serve como base para uma discussão da fenomenologia de materiais magnéticos e há analogias com a *forma* das relações encontradas no tratamento quântico.

## 11.1 Correntes de magnetização

Após a descoberta dos efeitos magnéticos das correntes, foi sugerido por Ampère que a magnetização de meios materiais (com os ímãs permanentes) deveria originar-se de correntes microscópicas, que foram denominadas *correntes de Ampère*; assim, todos os fenômenos magnéticos seriam gerados por *correntes*.

Deixando para mais tarde discutir a origem dessas correntes na escala atômica, vamos admitir a sua existência e ver como ela se reflete na escala macroscópica.

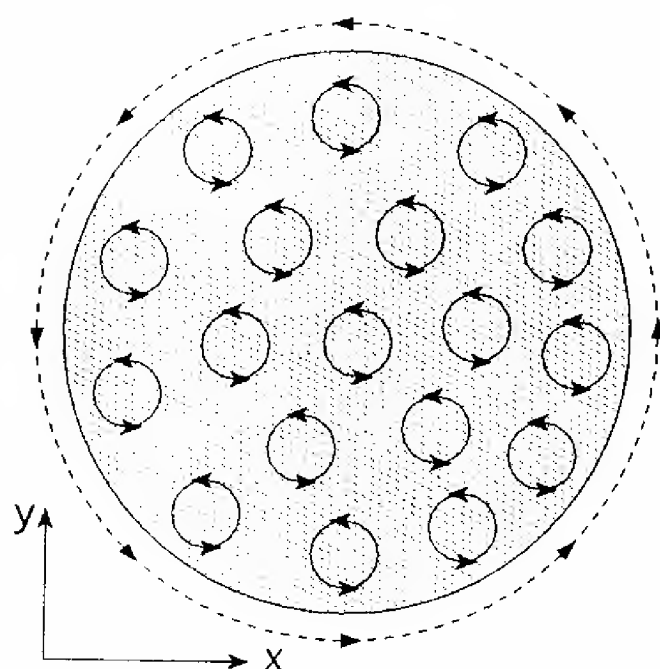
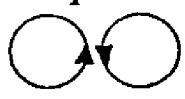


Figura 11.1 Correntes de Ampère num material magnético

Consideremos, para fixar as idéias, uma barra cilíndrica uniformemente imantada na direção axial, que tomaremos como eixo dos  $z$ . Segundo a imagem de Ampère, a magnetização resulta de correntes microscópicas, que podemos pensar como circulares e fluindo em planos *perpendiculares* ao eixo  $z$ . A fig. 11.1 representa um corte transversal do cilindro, suposto circular de raio  $a$ . A uniformidade da distribuição das microcorrentes (homogeneidade), todas igualmente orientadas, faz com que os efeitos de elementos adjac-

tes, em pontos internos, se cancelem dois a dois ; o fluxo através de elementos de superfície internos é  $= 0$ .

Entretanto, isto não vale na superfície do cilindro, pois não há elementos adjacentes externamente. O efeito resultante equivale portanto ao de uma *corrente superficial*, confinada à superfície do cilindro (em linha interrompida na fig. 11.1).

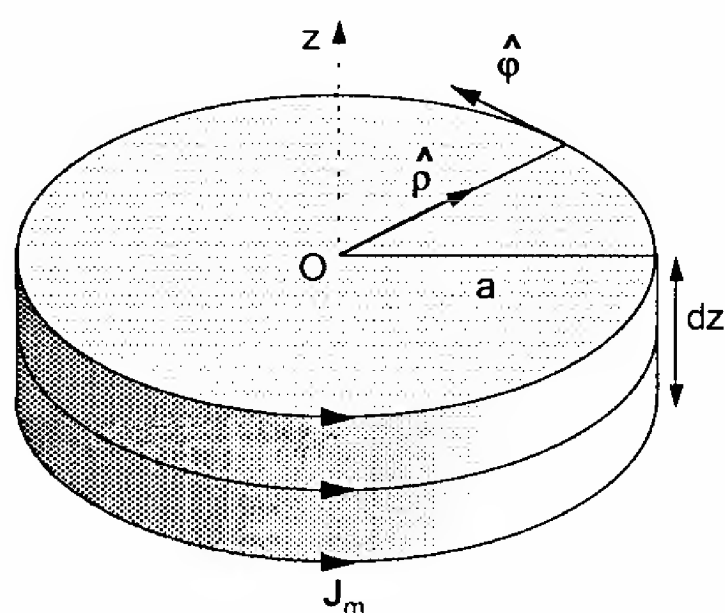


Figura 11.2 Corrente superficial no cilindro

Seja  $\mathbf{J}_m$  a *densidade de corrente superficial* correspondente, definida de tal forma que  $|\mathbf{J}_m| dz \equiv di$  é a intensidade de corrente no anel de altura  $dz$  ( $|\mathbf{J}_m| = di/dz$  é a intensidade de corrente por unidade de comprimento, medida em A/m). A direção de  $\mathbf{J}_m$  é tangente ao cilindro e, com a orientação da fig. 11.2,

$$\mathbf{J}_m = (di / dz) \hat{\phi} \quad (11.1.1)$$

Conforme vimos no Cap. 8, a espira anular de altura  $dz$  percorrida por uma corrente de intensidade  $di$  tem um momento de dipolo magnético

$$d\mathbf{m} = (di) \mathbf{S} = (di) \pi a^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (11.1.2)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a área orientada correspondente. Logo,

$$|d\mathbf{m}| = |\mathbf{J}_m| (\pi a^2) dz = |\mathbf{J}_m| dv \quad (11.1.3)$$

onde  $dv$  é o volume do cilindro de altura  $dz$ .

A magnetização  $\mathbf{M}$  é, por definição, o *momento de dipolo magnético por unidade de volume*:

$$\mathbf{M} \equiv \frac{d\mathbf{m}}{dv} \quad (11.1.4)$$

Como  $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}$ , resulta então

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{M} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} \equiv \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (11.1.5)$$

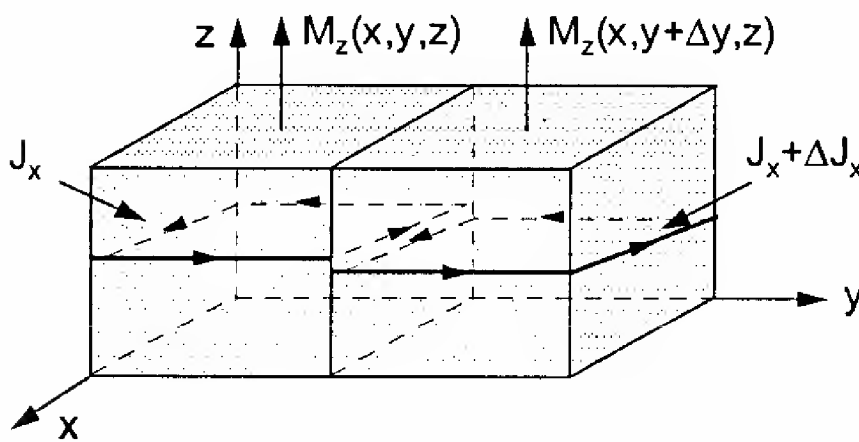
onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é a *normal externa* à superfície do cilindro. Dizemos que  $\mathbf{J}_m$  é a *densidade de corrente superficial de magnetização*, e este resultado é o análogo da (5.6.7),

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

para a densidade de carga de polarização superficial nas faces de um dielétrico homogeneamente polarizado com polarização  $\mathbf{P}$  (Cap. 5).

Da mesma forma que uma polarização inhomogênea leva à existência de uma densidade *volumétrica* de carga de polarização, uma *magnetização inhomogênea*  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, y, z)$  também corresponde a uma *densidade volumétrica de corrente de magnetização*  $\mathbf{j}_m$ .

Com efeito, imaginemos que o material magnetizado esteja (mentalmente) subdividido em blocos de volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , suficientemente pequeno para que a magnetização possa ser considerada como homogênea *dentro* de cada bloco, mas varie entre blocos adjacentes.



A fig. 11.3 mostra então que não mais haverá cancelamento das correntes superficiais de blocos adjacentes. Para a face adjacente  $\perp (Oy)$ , a corrente resultante na direção  $x$  será, pela (11.1.5),

Figura 11.3 Magnetização inhomogênea: blocos adjacentes

$$\begin{aligned} -J_x(x, y, z) + J_x(x, y + \Delta y, z) &= -M_z(x, y, z) + M_z(x, y + \Delta y, z) = +\frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \\ &= \text{intensidade / (por unidade de comprimento na direção } z) \end{aligned}$$

correspondente a uma intensidade

$$\Delta_1 i = (\Delta J_x) \cdot \Delta z = + \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z \quad (11.1.6)$$

através da face  $(\Delta y \Delta z)$ .

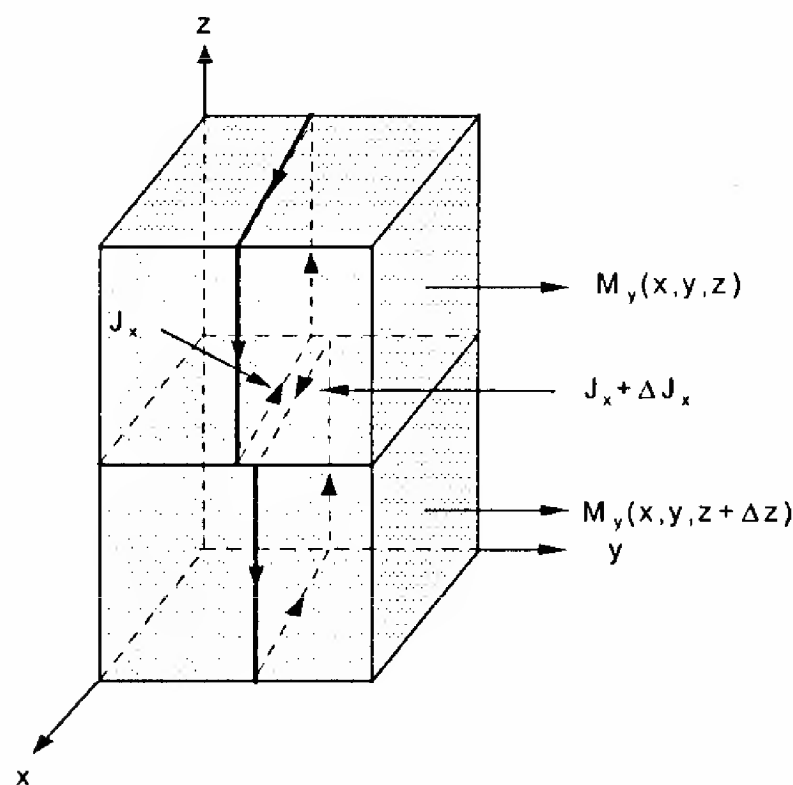


Figura 11.4 Magnetização inhomogênea: blocos superpostos

Outra contribuição para  $J_x$  vem da face contígua superior perpendicular a  $Oz$  [as faces perpendiculares a  $Ox$  não contribuem, porque só transportam corrente nas direções  $y$  e  $z$ ]. A corrente resultante é

$$\begin{aligned} J_x(x, y, z) - J_x(x, y, z + \Delta z) &= \\ &= M_y(x, y, z) - M_y(x, y, z + \Delta z) = \\ &= - \frac{\partial M_y}{\partial z} \Delta z \end{aligned}$$

o que dá uma contribuição à intensidade da corrente que atravessa a face  $\Delta y \Delta z$  de

$$\Delta_2 i = (\Delta J_x) \Delta y = - \frac{\partial M_y}{\partial z} \Delta y \Delta z \quad (11.1.7)$$

A corrente total através de  $\Delta y \Delta z$  é então

$$\Delta_1 i + \Delta_2 i = \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \equiv j_x \Delta y \Delta z \quad (11.1.8)$$

o que dá

$$j_x = \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = (\text{rot } \mathbf{M})_x \quad (11.1.9)$$

Como  $Ox$  é uma direção arbitrária, vemos que a densidade de corrente volumétrica de magnetização é

$$\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{M} \quad (11.1.10)$$

resultado análogo a  $\rho_p = -\text{div } \mathbf{P}$  [cf. (5.6.12)] para um dielétrico com polarização inhomogênea. As correntes  $\mathbf{j}_m$  também são "ligadas" aos átomos.

Para um bloco de material homogeneamente magnetizado, resulta  $\mathbf{j}_m = 0$ , mas a descontinuidade de  $\mathbf{M}$  nas faces leva à (11.1.5) como caso particular:

$$\mathbf{J}_m = \text{Rot} \mathbf{M} = \hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

pois  $\mathbf{M}_2 = 0$  e  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$ .

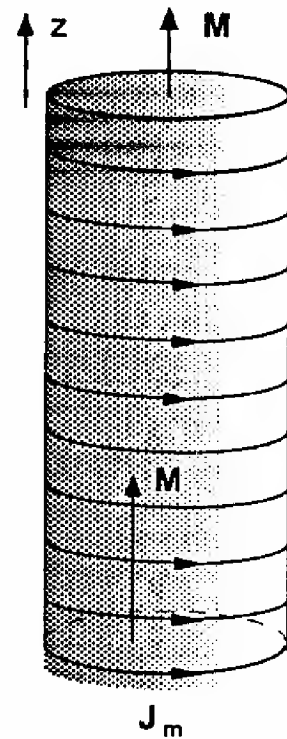


Figura 11.5 Cilindro homogeneamente magnetizado

Em particular, um cilindro longo com magnetização homogênea (barra imantada) equivale a uma distribuição de corrente superficial obtida na (11.1.1) (fig. 11.5)

$$\mathbf{J}_m = \frac{di}{dz} \hat{\phi} = M \hat{\phi} \quad (11.1.11)$$

como num solenóide com espiras muito juntas. Vemos também que a unidade de magnetização é A/m (ampères por metro).

## 11.2 O campo H

O campo magnético  $\mathbf{B}$  produzido pelas *correntes de magnetização* se soma àquele devido às correntes  $\mathbf{j}$  consideradas até aqui, devidas ao transporte de portadores de carga, que chamaremos de *correntes livres* (as correntes de magnetização são "ligadas", como as cargas de polarização). Logo, na presença de magnetização, a lei de Ampère fica

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \text{rot} \mathbf{M} \quad (11.2.1)$$

o que podemos escrever (lei de Ampère para  $\mathbf{H}$ )

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (11.2.2)$$

definindo um novo campo  $\mathbf{H}$  por

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (11.2.3)$$



Esses resultados são o análogo de [cf. (5.6.14)]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

para dielétricos. Novamente,  $1/\mu_0$  é o análogo de  $\epsilon_0$ .

Vemos também que a unidade de  $\mathbf{H}$  é o ampère/metro, como a de  $\mathbf{M}$ . As fontes de  $\mathbf{H}$  são apenas as correntes *livres*. Por outro lado,

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M} \quad (11.2.5)$$

de forma que as linhas de  $\mathbf{H}$  não são fechadas, como as de  $\mathbf{B}$ , se  $\mathbf{M}$  não é homogêneo (ou se é descontínuo, como ocorre na interface entre um meio magnetizado e o vácuo)

### *Equação constitutiva*

Em toda a discussão acima, não procuramos relacionar  $\mathbf{M}$  com o campo. Para meios dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos, tínhamos a relação constitutiva (5.6.9),

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (11.2.6)$$

( $\kappa$  = constante dielétrica;  $\epsilon$  = permissividade do dielétrico;  $\chi$  = susceptibilidade dielétrica).

Analogamente, se tivermos um *meio magnético linear, homogêneo e isotrópico*, a magnetização  $\mathbf{M}$  é proporcional ao campo  $\mathbf{B}$  (ou, equivalentemente,  $\mathbf{H}$ ) no interior do meio:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (11.2.7)$$

onde  $\chi_m$  chama-se *susceptibilidade magnética* do meio. Daí resulta

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H} \quad (11.2.8)$$

onde

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \equiv \mu_0 \kappa_m \quad ; \quad \kappa_m \equiv 1 + \chi_m \quad (11.2.9)$$

A constante material  $\mu$  chama-se *permeabilidade magnética* do meio, e  $\kappa_m = 1 + \chi_m$  (o análogo da constante dielétrica) é a *permeabilidade magnética relativa* (número puro, sem dimensões). Em particular, no vácuo,  $\mu = \mu_0$ ; daí chamarmos  $\mu_0$  de *permeabilidade magnética do vácuo*.

Unidades:

$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} ; [\mu] = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} ; [H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Os materiais *magnéticos* lineares são de dois tipos, *diamagnéticos* ( $\mu < \mu_0$ ,  $\chi_m < 0$ ) e *paramagnéticos*, ( $\mu > \mu_0$ ,  $\chi_m > 0$ ). Em ambos os casos, como vamos ver,  $|\chi_m|$  é  $\ll 1$ : valores típicos são da ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-5}$ , ou seja, trata-se de efeitos muito pequenos; a polarização de dielétricos é muito mais forte (comparativamente), do que a magnetização destes materiais. Isso implica  $\mu \approx \mu_0$  e  $\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{H}$ .

Efeitos fortes são encontrados apenas para materiais *ferromagnéticos*, mas estes são *não-lineares*, o que equivale a dizer que  $\chi_m$  e  $\mu$  variam com  $\mathbf{B}$ .

Vamos discutir primeiro um modelo clássico do diamagnetismo e paramagnetismo; veremos depois por que ele não é adequado.

### 11.3 A razão giromagnética

As correntes microscópicas postuladas por Ampère são correntes na escala atômica. Embora não exista um "átomo clássico", podemos considerar um modelo híbrido, o átomo de Bohr, onde se imaginava a existência de órbitas dos elétrons em torno do núcleo, descritas classicamente, embora determinadas por "regras de quantização" (a teoria de Bohr foi precursora da mecânica quântica).

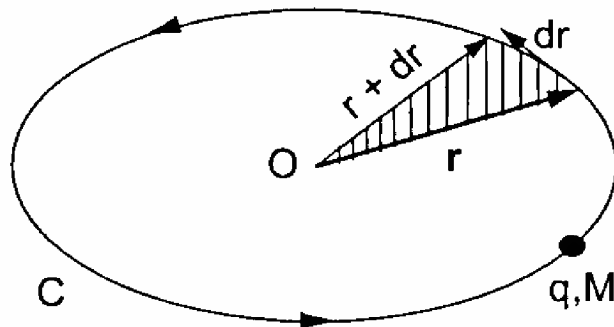


Figura 11.6 Órbita de Bohr

Consideremos então uma partícula de carga  $q$  e massa  $M$ , descrevendo (fig. 11.6) uma órbita fechada em torno de um ponto  $O$  (núcleo), sob a ação de *forças centrais* (força coulombiana, no átomo de Bohr). Se  $\tau$  é o *período* da órbita, a intensidade da corrente associada ao movimento da partícula (carga por unidade de tempo que atravessa cada ponto da órbita) é

$$i = \frac{q}{\tau} \quad (11.3.1)$$

e o momento de dipolo magnético associado à órbita é

$$\mathbf{m} = i\mathbf{S} = i \cdot \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (11.3.2)$$

onde a  $\oint_C$ , estendida à órbita, é  $= 2\mathbf{S}$  (na fig. 11.6,  $1/2 \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  é a área orientada do triângulo hachurado).

Como  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  ( $\mathbf{v}$  = velocidade instantânea da carga),

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2\tau} \oint_C \mathbf{r} \times \mathbf{v} dt \quad (11.3.3)$$

Mas, se  $M$  é a massa da partícula ( $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$  = momento linear)

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{M} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{\mathbf{l}}{M} \quad (11.3.4)$$

onde  $\mathbf{l}$  é o *momento angular* da carga em relação ao centro, que se *conserva*, por tratar-se de um movimento sob a ação de forças centrais. Logo, a (11.3.3) fica ( $\mathbf{l}$  sendo constante)

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2M} \mathbf{l} \cdot \frac{1}{\tau} \oint_C dt$$

Mas  $\oint_C dt = \tau$  (período da órbita). Logo, finalmente,

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{l} \quad (11.3.5)$$

onde

$$\gamma = \frac{q}{2M} \quad (11.3.6)$$

Vemos portanto que o *momento de dipolo magnético* ( $\mathbf{m}$ ) associado à "corrente de Ampère" produzida pela circulação da carga  $q$  na órbita é proporcional a  $\mathbf{l}$ , o *momento angular orbital da partícula*. A constante de proporcionalidade  $\gamma$  chama-se *razão giromagnética clássica*. Para um elétron,  $q = -e$  e  $M = m_e$  (massa do elétron); logo,

$$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e} \quad (11.3.7)$$

A mecânica quântica leva a uma relação idêntica a esta entre momento de dipolo magnético e momento angular orbital de um elétron. O sinal  $(-)$  implica que o momento magnético é antiparalelo ao momento angular. Como  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{m}$  são aditivos, a mesma relação se aplica ao momento magnético *total*  $\mathbf{M}$  associado às órbitas dos diferentes elétrons do átomo:  $\mathbf{M} = \gamma_e \mathbf{L}$ , onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular orbital *resultante* do conjunto de elétrons. Finalmente, somando sobre todos os átomos, o resultado se estende a um corpo macroscópico.

Isso permitiu uma verificação experimental, detectando *efeitos giromagnéticos*. Um deles, observado por J. S. Barnett em 1914, é a *magnetização por rotação* de uma barra cilíndrica de ferro, inicialmente não-imantada. A experiência inversa, realizada por A. Einstein e W. J. Haas em 1915, consistiu em suspender um cilindro fino do material,

através de uma fibra de vidro, dentro de um solenóide, imantá-lo (pela passagem de corrente através do solenóide) e observar a torção da fibra provocada pela rotação do cilindro. O efeito (como no caso de Barnett) é muito pequeno.

Einstein e de Haas conseguiram observá-lo usando uma técnica baseada em ressonância entre as oscilações da magnetização, provocadas pela passagem de uma corrente alternada através do solenóide, e as oscilações mecânicas da fibra de suspensão. A expectativa era encontrar  $\gamma = \gamma_e$ , demonstrando a existência das correntes de Ampère e a sua origem nos movimentos orbitais dos elétrons atômicos (a teoria de Bohr tinha sido formulada 2 anos antes).

Empregando um cilindro de ferro, Einstein e de Haas encontraram um resultado consistente com o que esperavam,  $\gamma = \gamma_e$ , mas não tinham feito a experiência com suficiente cuidado. Experiências realizadas alguns anos mais tarde, e confirmadas com precisão cada vez maior desde aquela época, mostraram, para materiais *ferromagnéticos* (Fe, Ni, ...), tanto no efeito Barnett como no efeito Einstein-de Haas, que, com muito boa aproximação, nestes materiais

$$\gamma = 2\gamma_e = -\frac{e}{m_e} \quad (11.3.8)$$

ou seja, a razão giromagnética é o *dobro* da clássica.

A explicação desse resultado só veio com a descoberta do *spin* do elétron (já mencionado no cap. 6). Além do momento angular *orbital* em relação ao núcleo atômico, o elétron tem um momento angular *intrínseco*, o spin, comparável (embora esta imagem seja imprópria) ao de um giroscópio em rotação em torno de seu eixo. O spin também gera um momento magnético, mas com razão giromagnética dupla da clássica. A magnetização de materiais ferromagnéticos é devida quase exclusivamente ao spin dos elétrons (Seç. 11.7).

O momento angular *total*  $\mathbf{J}$  dos elétrons de um átomo é a resultante de seus momentos angulares orbitais e de spin, e a razão giromagnética correspondente para o átomo como um todo é da forma

$$\mathbf{m} = g \gamma_e \mathbf{J} = -g \cdot \frac{e}{2m_e} \mathbf{J} \quad (11.3.9)$$

onde  $g$  é um número positivo da ordem da unidade, conhecido como *fator  $g$  de Landé*, que pode ser calculado com o auxílio da teoria quântica do momento angular (para o spin de um elétron isolado,  $g = 2$ ).

Em materiais *diamagnéticos*, os átomos têm momento angular *total*  $= 0$ , de forma que não possuem momento de dipolo magnético permanente (intrínseco): ele é *induzido* pelo campo magnético externo. Materiais *paramagnéticos* têm átomos com  $\mathbf{J} \neq 0$ ,

portanto dotados de momento magnético intrínseco, e o efeito principal do campo  $\mathbf{B}$  externo é *orientar* esses dipolos.

## 11.4 Diamagnetismo

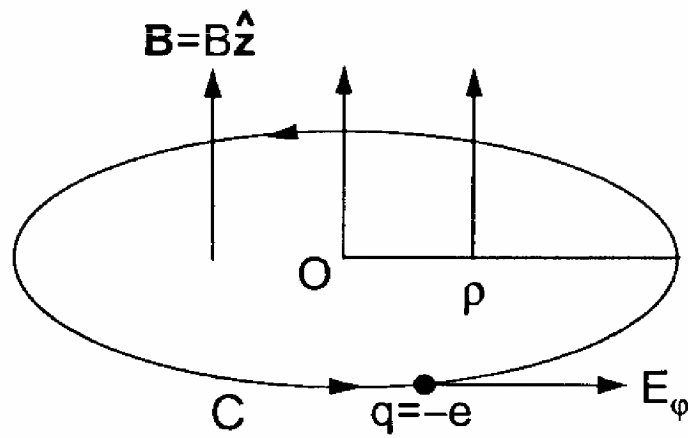


Figura 11.7 Coordenadas no átomo

Vejamos o que acontece com o movimento dos elétrons num átomo quando ele é submetido a um campo externo  $\mathbf{B}$ . Para isso, vamos imaginar que o campo é ligado *gradualmente*, durante um certo intervalo de tempo, passando de 0 ao valor final  $\mathbf{B}$ . Dentro das dimensões atômicas, podemos considerar o campo como sendo uniforme; tomaremos a direção de  $\mathbf{B}$  como eixo  $Oz$ , com origem  $O$  no centro do átomo (fig. 11.7), com  $\mathbf{B} = B(t)\hat{\mathbf{z}}$ .

Pela lei de Faraday, a variação com  $t$  do fluxo de  $\mathbf{B}$  através do átomo induz um campo elétrico  $\mathbf{E}$ . Tomando um caminho  $C$  circular de raio  $\rho$  com centro em  $O$ , passando pela posição de um elétron, no plano  $(xy)$  perpendicular a  $\mathbf{B}$ , a lei de Faraday dá

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_C}{dt} = -\pi\rho^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi\rho \langle E_\phi \rangle \quad (11.4.1)$$

onde  $\langle E_\phi \rangle$  é o valor médio da componente tangencial de  $\mathbf{E}$  ao longo de  $C$ . Logo,

$$\langle E_\phi \rangle = -\frac{\rho}{2} \frac{dB}{dt} \quad (11.4.2)$$

O *torque* correspondente sobre o elétron, em relação a  $O$ , é

$$\langle \tau_z \rangle = (-e) \langle E_\phi \rangle \rho = \frac{1}{2} \rho^2 e \frac{dB}{dt} \quad (11.4.3)$$

e, pela lei fundamental da dinâmica de rotações, ele dá a taxa média de variação temporal do momento angular orbital  $l_z$  deste elétron:

$$\left\langle \frac{dl_z}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} e \rho^2 \frac{dB}{dt} \quad (11.4.4)$$

Integrando em relação ao tempo de  $t = 0$  ( $B = 0$ ) até o valor final do campo  $B$ , vemos que a variação de momento angular associada a esse elétron é

$$\mathbf{l}_1 = \frac{1}{2} e \rho^2 \mathbf{B} \quad (\mathbf{B} = B\hat{z}, \rho^2 = x^2 + y^2) \quad (11.4.5)$$

e, como se trata de momento angular *orbital*, a razão giromagnética é a clássica, de forma que o momento de dipolo magnético associado é (o índice 1 refere-se à contribuição de 1 elétron)

$$\mathbf{m}_1 = \gamma_e \mathbf{l} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{l} = -\frac{e^2}{4m_e} \rho^2 \mathbf{B} \quad (11.4.6)$$

Para um átomo com  $Z$  elétrons ( $Z$  = número atômico), devemos somar sobre todos eles, substituindo  $\rho^2$  pelo seu valor médio. Esperamos que o átomo tenha simetria esférica na ausência de campo externo, o que dá

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \quad (11.4.7)$$

Logo,

$$\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle$$

e vem

$$\mathbf{m} = -\frac{2}{3} \frac{Ze^2}{4m_e} \langle r^2 \rangle \mathbf{B} \quad \left\{ \quad \mathbf{m} = -\frac{Ze^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle \mathbf{B} \right. \quad (11.4.8)$$

onde  $\mathbf{m}$  é o momento de dipolo magnético total *do átomo induzido pelo campo*. Vemos que  $\mathbf{m}$  é *antiparalelo* a  $\mathbf{B}$ , em conformidade com a lei de Lenz.

A *magnetização*  $\mathbf{M}$  (momento de dipolo magnético por unidade de volume) se obtém multiplicando  $\mathbf{m}$  pelo *número*  $N$  *de átomos por unidade de volume*:

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m} = -N \frac{Ze^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle \mathbf{B} \quad (11.4.9)$$

Como  $\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{H}$  para materiais não-ferromagnéticos, concluímos que a susceptibilidade magnética (11.2.7) é dada por

$$\chi_m = -N\mu_0 \frac{Ze^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle \quad (11.4.10)$$

onde o sinal negativo corresponde à lei de Lenz: a magnetização induzida se *opõe* ao campo  $\mathbf{B}$ . A (11.4.10) é a *fórmula de Langevin*.

A *susceptibilidade molar* é referida a 1 mol da substância (massa em g igual à massa atômica); neste caso,  $N$  é o número de Avogadro,  $\approx 6 \times 10^{23}$ . Como, para 1 mol,

$$N\mu_0 \frac{e^2}{6m_e} \approx 6 \times 10^{23} \times 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{6 \times 9,1 \times 10^{-31}} \approx 3,5 \times 10^9 / \text{m}^2$$

e a ordem de grandeza típica da susceptibilidade diamagnética molar é  $-10^{-11} \text{ Z/mol}$ , concluímos que  $\langle r^2 \rangle$  é da ordem de  $10^{-21} \text{ m}^2$ , o que concorda com a ordem de grandeza das dimensões atômicas ( $\leq 10^{-10} \text{ m}$ ).

Uma das substâncias mais fortemente diamagnéticas é o bismuto, para o qual  $\chi_m \approx -1,7 \times 10^{-4}$ ; outros exemplos são Hg, Ag, Pb,  $\text{H}_2$  e  $\text{H}_2\text{O}$ .

Devido ao sinal negativo de  $\chi_m$  ( $\mathbf{M}$  antiparalelo a  $\mathbf{B}$ ), em confronto com a susceptibilidade dielétrica  $\chi$  (que é  $> 0$ ), o comportamento de uma amostra diamagnética num campo magnético *inomogêneo* é o oposto do de um dielétrico num campo  $\mathbf{E}$  inomogêneo. O dielétrico, como vimos no Cap. 4, é *atraído* para as regiões em que  $|\mathbf{E}|$  é mais intenso.

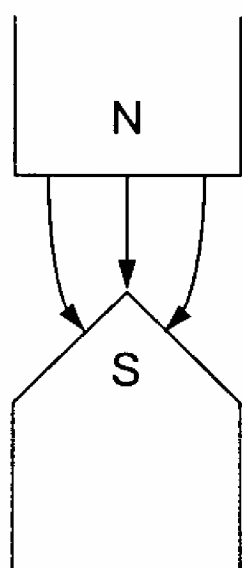


Figura 11.8 Campo  $\mathbf{B}$  inomogêneo

Um material diamagnético, colocado num campo  $\mathbf{B}$  inomogêneo, como o da fig. 11.8, é (fracamente) *repelido* pela região onde  $|\mathbf{B}|$  é mais intenso (pólo pontiagudo do ímã).

A teoria quântica leva a um resultado formalmente idêntico à fórmula de Langevin para  $\chi_m$ , permitindo ao mesmo tempo calcular  $\langle r^2 \rangle$ . Classicamente, porém, não existe uma explicação para a estabilidade do átomo: os elétrons colapsariam para dentro do núcleo, levando a

$\langle r^2 \rangle = 0$  e  $\chi_m = 0$  (cf. Seq. 11.6).

## 11.5 Paramagnetismo

Consideremos agora uma substância *paramagnética*, cujos átomos ou moléculas têm um momento de dipolo magnético intrínseco (permanente)  $|\mathbf{m}_0|$ . Na ausência de um campo magnético externo, os dipolos  $\mathbf{m}_0$  estão orientados em direções distribuídas ao acaso, e a magnetização resultante (valor médio) é  $= 0$ .

Um campo  $\mathbf{B}$  externo tende a *alinhar* os dipolos, levando a  $\mathbf{M} \neq 0$ . Note que são energeticamente favorecidos dipolos *paralelos* (não antiparalelos) a  $\mathbf{B}$ , de forma que  $\chi_m$  será  $> 0$  para materiais paramagnéticos.

A tendência ao alinhamento encontra oposição na *agitação térmica*; assim, a susceptibilidade paramagnética deve depender da *temperatura*  $T$ , diminuindo quando  $T$  aumenta. Para calcular  $\chi_m$ , precisamos usar a *mecânica estatística*.

Vimos (*Física Básica 2*, Seç. 12.2) que a probabilidade de encontrar uma partícula (átomo, molécula) com energia potencial  $U$  num campo de forças, à temperatura  $T$ , é proporcional ao *fator de Boltzmann*.

$$\mathcal{F} = \exp \left( - \frac{U}{kT} \right) \quad (11.5.1)$$

onde  $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  é a *constante de Boltzmann*.

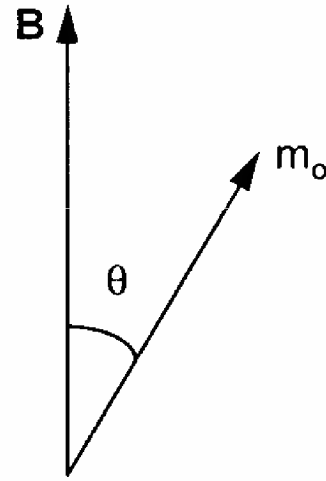


Figura 11.9 Dipolo magnético permanente no campo  $\mathbf{B}$

Para um dipolo magnético  $\mathbf{m}_0$  num campo externo  $\mathbf{B}$ , a energia potencial é, como vimos,

$$U = -\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{B} = -m_0 B \cos \theta \quad (11.5.2)$$

onde  $\theta$  (fig. 11.9) é o ângulo entre  $\mathbf{m}_0$  e  $\mathbf{B}$ . Logo,

$$\mathcal{F} = \exp \left( \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta \right) \quad (11.5.3)$$

O número de partículas, por unidade de volume, em que a direção de  $\mathbf{m}_0$  cai dentro de um ângulo sólido  $d\Omega$ , com  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  em coordenadas esféricas [cf. (3.4.11)], é

$$dN = A \mathcal{F} d\Omega = A \exp \left( \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta \right) \sin \theta d\theta d\phi \quad (11.5.4)$$

onde  $A$  é uma constante, tal que  $\oint dN = N$  é o número total de partículas por unidade de volume, ou seja,

$$A \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \mathcal{F} \sin \theta d\theta = N \quad (11.5.5)$$

Para campos  $B$  e temperaturas  $T$  usuais, a energia magnética de alinhamento é muito menor que a energia térmica:

$$\frac{m_0 B}{kT} \ll 1$$



e

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{m_0 B}{kT} \cos \theta\right) \approx 1 + \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta \quad (11.5.6)$$

Mas

$$\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta = -\frac{1}{4} \cos(2\theta) \Big|_0^\pi = 0 \quad (11.5.7)$$

de forma que a (11.5.5) dá, com

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = -\cos \theta \Big|_0^\pi = 2,$$

$$4\pi A \approx N \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{N}{4\pi} \end{array} \right. \quad (11.5.8)$$

ou seja,

$$dN \equiv \frac{N}{4\pi} \left(1 + \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta\right) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (11.5.9)$$

o que dá a fração  $dN/N$  dos átomos com  $\mathbf{m}_0$  dentro de  $d\Omega$ .

Para calcular a contribuição desses átomos à magnetização  $\mathbf{M}$ , basta considerar a componente na direção de  $\mathbf{B}$ ,  $m_0 \cos \theta$ , pois as componentes perpendiculares a  $\mathbf{B}$  se cancelam (por simetria,  $\mathbf{M}$  é paralelo a  $\mathbf{B}$ ). Logo,

$$M \equiv \int (m_0 \cos \theta) \, dN = \frac{Nm_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\times \int_0^\pi \left(1 + \frac{m_0 B}{kT} \cos \theta\right) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \quad (11.5.10)$$

A integral do primeiro termo se anula, pela (11.5.7). Assim,

$$M \equiv \frac{1}{2} \frac{N(m_0)^2 B}{kT} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \quad (11.5.11)$$

Com a mudança de variável  $\cos \theta = x$ , vem

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

de modo que, finalmente,

$$M \equiv N \frac{(m_0)^2}{3kT} B \quad (11.5.12)$$

o que dá, com  $B \approx \mu_0 H$  (Seç. 11.2),

$$\chi_m = N\mu_0 \frac{(m_0)^2}{3kT} = \frac{C}{T} \quad (11.5.13)$$

que é  $> 0$  e obedece à *lei de Curie* (descoberta por Pierre Curie em 1895): a susceptibilidade paramagnética é inversamente proporcional à temperatura absoluta  $T$ , conforme esperado. A constante  $C$  chama-se *constante de Curie*, e a partir dessa relação podemos estimar, comparando com a experiência, o valor de  $m_0$  (cujo cálculo teórico requer a mecânica quântica). Em contraste, a susceptibilidade diamagnética não depende de  $T$ .

Valores típicos de  $m_0$  são  $\sim 10^{-23}$  (Seç. 11.7), o que dá, à temperatura ambiente, valores típicos de  $\chi_m \lesssim 10^{-3}$ . Embora nestas substâncias também exista sempre um efeito diamagnético, vemos que ele pode ser desprezado em confronto com a susceptibilidade paramagnética, que é bem maior. São exemplos de materiais paramagnéticos: Al, O<sub>2</sub>.

Um material paramagnético é *fracamente atraído* para a região onde  $|\mathbf{B}|$  é mais intenso, num campo inhomogêneo (como um dielétrico com  $|\mathbf{E}|$  inhomogêneo).

É importante notar que os resultados acima foram obtidos para  $m_0 B \ll kT$ , o que deixa de valer para temperaturas suficientemente baixas. Neste caso, porém, os efeitos quânticos dominam. O paramagnetismo é empregado, inclusive, para atingir temperaturas ultra-baixas, pelo método da "desmagnetização adiabática".

## 11.6 Crítica do tratamento clássico

Vamos ver agora que os resultados precedentes não são realmente aplicáveis: um tratamento clássico cuidadoso leva à *total ausência de magnetização num material em equilíbrio térmico*. Isso foi mostrado pela primeira vez em duas teses de doutorado de 1911: a de Niels Bohr e a da física holandesa J. H. van Leeuwen.

Consideremos um sistema em repouso dentro de uma caixa, em equilíbrio termodinâmico à temperatura  $T$ . De acordo com a mecânica estatística clássica, a probabilidade de encontrar o sistema num estado de energia  $E$  (que temos de usar para calcular o valor médio da magnetização, como foi feito acima) é proporcional ao fator de Boltzmann

$$\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

Para calcular  $\mathbf{M}$ , temos de saber como esta probabilidade é afetada pela presença de um campo magnético externo  $\mathbf{B}$ , comparando o sistema *com campo* com o sistema *na ausência de campo*.

O sistema é formado, ao nível atômico, de partículas carregadas (elétrons e prótons), que interagem com o campo magnético. A força exercida pelo campo sobre uma partícula de carga  $q$  e velocidade  $\mathbf{v}$  é a força de Lorentz  $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Mas sabemos que essa força *não realiza trabalho*, porque é perpendicular a  $\mathbf{v}$ . Logo, ela *não altera a energia  $E$  da partícula*: a distribuição de probabilidades dos vários estados de movimento é a mesma na caixa com  $\mathbf{B} \neq 0$  e com  $\mathbf{B} = 0$ , quando em equilíbrio termodinâmico à temperatura  $T$ . Isso implica que não pode haver magnetização induzida pelo campo magnético:  $\mathbf{M} = 0$  e  $\chi_m = 0$ .

O que está errado nos raciocínios acima, que levaram a  $\chi_m \neq 0$ ? Em ambos os casos, admitimos a existência de modelos atômicos estáveis, num deles com  $\langle r^2 \rangle \neq 0$  e no outro com  $\mathbf{m}_0 \neq 0$ . Ambas as hipóteses não são válidas classicamente: a estabilidade do átomo e da matéria decorrem de efeitos quânticos.

Por outro lado, admitindo essa estabilidade (como fizemos), obtêm-se resultados que preservam algum grau de validade na teoria quântica. Daí a utilidade do tratamento acima.

## 11.7 Ferromagnetismo

Além da substância ferromagnética mais importante, o Fe, há outros elementos ferromagnéticos, como Ni e Co, bem como ligas deles com Fe.

Num material ferromagnético,  $|\mathbf{M}|$  é várias ordens de grandeza maior do que em materiais paramagnéticos ou diamagnéticos, e a relação entre  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  é *não-linear*. Gráficamente, pode ser representada por uma *curva de magnetização*. A natureza dessa curva depende não só do material, mas do tratamento a que este material foi submetido, ou seja, da história anterior.

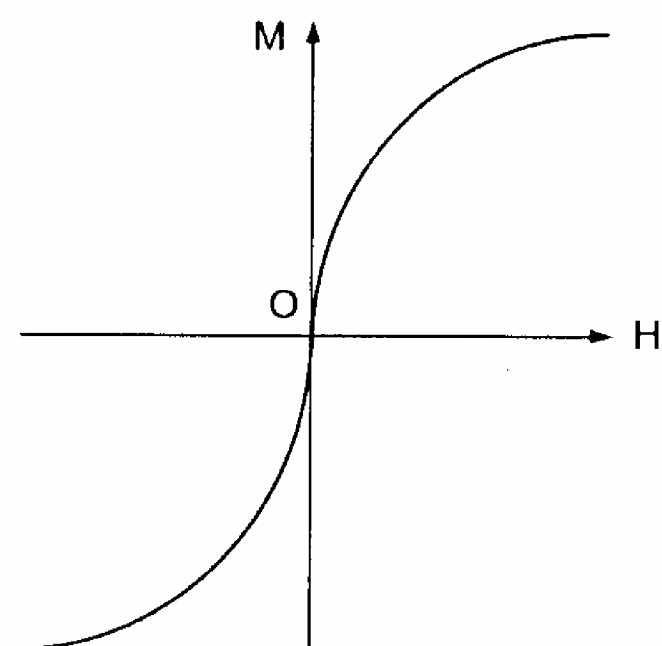


Figura 11.10 Curva de magnetização de um material ferromagnético

Consideremos primeiro um material como o ferro doce, em geral preparado por aquecimento até uma temperatura elevada, seguido de resfriamento lento (processo de recozimento). Se submetermos uma amostra, inicialmente desmagnetizada, a um campo  $\mathbf{H}$  crescente, a curva de magnetização terá tipicamente o aspecto indicado na fig. 11.10, onde valores negativos de  $H$  correspondem à inversão do sentido de  $\mathbf{H}$ .

O coeficiente angular inicial  $dM/dH$ , que define uma "susceptibilidade inicial"  $\chi_m$ , é extremamente elevado, com valores da ordem de  $10^2$  a  $10^3$ , contrastando com os valores muito próximos de 1 encontrados em materiais diamagnéticos ou paramagnéticos.

Entretanto, à medida que  $H$  cresce,  $M$  vai crescendo mais lentamente, tendendo a atingir um patamar após o qual se mantém praticamente constante, efeito conhecido por *saturação*. Se continuarmos definindo  $\mu$  como  $B/H$  (que passa a ser uma função de  $H$ ), a permeabilidade magnética relativa  $\mu/\mu_0$  atinge valores típicos  $\sim 10^4$  e o campo  $B$  de saturação chega a  $\sim 10^4$  Gauss ( $= 1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$ ).

Devido à aplicação de materiais ferromagnéticos como núcleo de transformadores (para aumentar o fluxo de indução), interessa-nos seguir o comportamento de  $M$  quando  $H$  é um campo oscilante, invertendo-se periodicamente (corrente alternada).

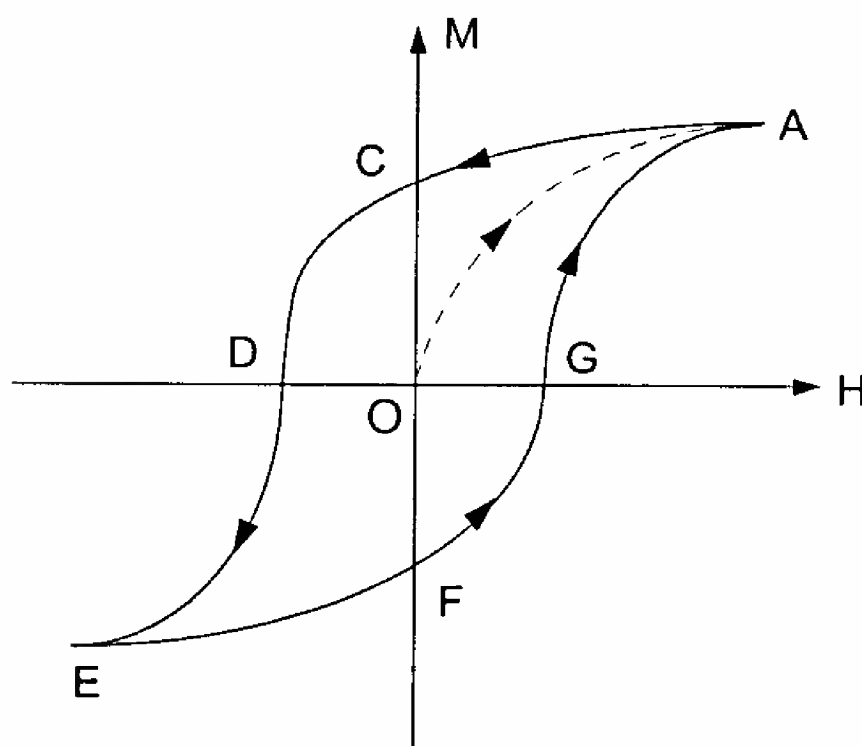


Figura 11.11 Ciclo de histerese

Para um material magneticamente "duro", como o aço temperado, produzido por aquecimento seguido de resfriamento brusco, o comportamento típico está ilustrado na fig. 11.11. Se começarmos com o material desmagnetizado, ele segue inicialmente uma curva de magnetização como  $O \rightarrow A$ , do tipo da já discutida.

Entretanto, se diminuirmos  $H$  a partir de  $A$ ,  $M$  não volta pelo mesmo caminho  $A \rightarrow O$ : decresce mais lentamente, segundo a curva  $A \rightarrow C$ . No ponto  $C$ , em que  $H = 0$ ,  $M$  é  $\neq 0$ : o material permanece imantado na ausência de campo magnetizante externo. O valor de  $M$  no ponto  $C$  chama-se *magnetização residual*, e o fenômeno é conhecido como *remanência*.

Invertendo o sentido de  $H$  e aumentando  $|H|$ , a magnetização segue o trajeto  $C \rightarrow D$ : é preciso atingir um valor negativo de  $H$  suficientemente grande, associado ao ponto  $D$ , para que  $M$  volte a se anular. O valor de  $|H|$  no ponto  $D$  chama-se *coercividade* do material.

Continuando com  $H < 0$  e  $|H|$  crescente,  $|M|$  volta à região de saturação no ponto  $E$ . Repetindo o ciclo em sentido inverso a partir de  $E$ , a magnetização segue o caminho  $E \rightarrow F \rightarrow G$  da fig. 11.11 e daí volta para  $A$ , fechando o ciclo, que daí em diante vai sendo percorrido periodicamente para uma corrente alternada.

O fato de que a curva de magnetização não é unívoca, dependendo da história anterior, chama-se *histerese* (do grego "atraso"), e o ciclo fechado que acabamos de descrever chama-se *ciclo de histerese*. No caso do ferro doce, também há um ciclo de

histerese, mas a sua "largura" (distância entre  $D$  e  $G$  na fig. 11.11) é muito menor, podendo aparentar uma curva unívoca em forma de "S".

Os resultados acima descritos para materiais ferromagnéticos valem somente para temperaturas  $T$  abaixo de uma temperatura  $\Theta$  característica de cada material, chamada *ponto de Curie*: seu valor é de 1043K para o Fe; 1388K para Co e 627K para o Ni. Para  $T > \Theta$ , o material torna-se *paramagnético*, e sua susceptibilidade magnética  $\chi_m$ , como função de  $T$ , obedece à *lei de Curie-Weiss* [generalização da lei de Curie (11.5.13)]:

$$\boxed{X_m = \frac{C}{T - \Theta}} \quad (T > \Theta) \quad (11.7.1)$$

onde  $C$  é a constante de Curie do material, quando paramagnético [na realidade, para  $T \downarrow \Theta$  (por valores superiores), verifica-se que

$$\frac{1}{T - \Theta}$$

deve ser substituído por

$$\frac{1}{(T - \Theta)^\gamma}$$

onde  $\gamma$  é um *expoente crítico* característico da substância; para o Fe, tem-se  $\gamma \approx 1.33$  ].

Para explicar a dependência em  $1/(T - \Theta)$ , Pierre Weiss propôs em 1907 que o campo  $\mathbf{H}$  *efetivo* que atua sobre cada átomo devesse levar em conta a interação com os momentos de dipolo magnético devidos aos outros átomos, suposta proporcional a  $\mathbf{M}$ ,

$$\boxed{\mathbf{H}_{ef} = \mathbf{H} + W \mathbf{M}} \quad (11.7.2)$$

onde  $W$  seria uma constante  $> 0$ ;  $H_{ef}$  é também chamado de "campo interno" ou "campo molecular".

Assim, teríamos, aplicando a lei de Curie (11.5.13) (lembrando que, para  $T > \Theta$ , o material é paramagnético),

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{C}{T} \mathbf{H}_{ef}} \quad (11.7.3)$$

o que dá

$$\mathbf{M} = \frac{C}{T} (\mathbf{H} + W \mathbf{M})$$

Resolvendo em relação a  $\mathbf{M}$ , resulta

$$M \left( 1 - \frac{CW}{T} \right) = \frac{C}{T} H \quad \left\{ \quad M = \frac{C}{(T - CW)} H \right. \quad (11.7.4)$$

que é a lei de Curie-Weiss, com

$$\Theta = CW \quad (11.7.5)$$

Como  $\Theta$  e  $C$  são conhecidos, pelo ajuste à lei de Curie-Weiss, isto permite obter o valor de  $W$  e da contribuição  $WM$  ao campo interno. Os valores de  $\mu_0 WM$  resultantes são da ordem de  $10^3 \text{ T} = 10^7 \text{ G}$ , tão intensos que não poderiam ser explicados por nenhuma interação *magnética* com dipolos de átomos próximos.

Com efeito, o valor típico de um momento de dipolo magnético atômico é obtido a partir da razão giromagnética e do fato de que o momento angular  $|\mathbf{J}|$  do átomo é da ordem de  $\hbar$ . Logo, a ordem de grandeza de  $|\mathbf{m}|$  é a do *magnéton de Bohr*

$$m_B \equiv \frac{e \hbar}{2m_e} \quad (11.7.6)$$

Temos

$$m_B \approx \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 1,05 \times 10^{-34}}{2 \times 9,1 \times 10^{-31}} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Logo,

$$m_B \approx 9,3 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (11.7.7)$$

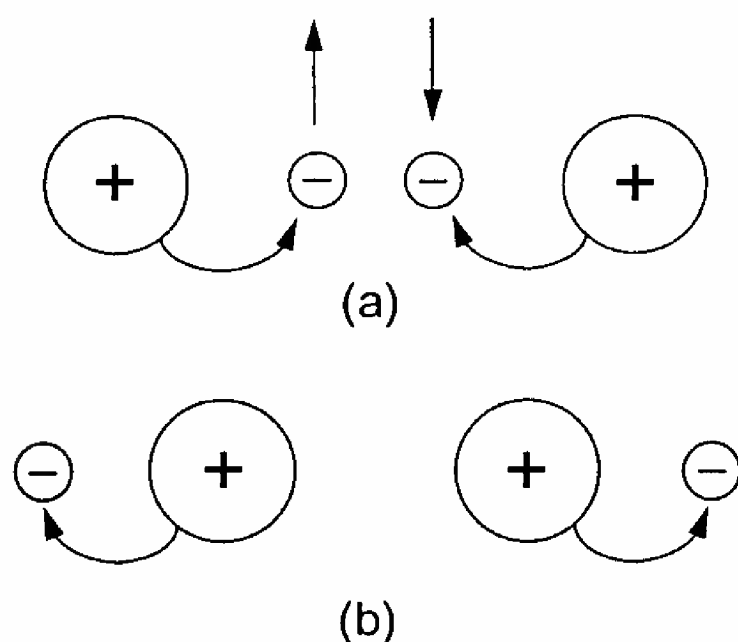
O campo  $|\mathbf{B}|$  devido a um dipolo magnético da ordem de  $m_B$  situado à distância interatômica  $a$  (campo num átomo devido a um átomo vizinho) é da ordem de [cf. (8.3.15)]

$$B \sim \frac{\mu_0 m_B}{2\pi a^3} \sim \frac{1,9 \times 10^{-31}}{a^3} \text{ T} \quad (11.7.8)$$

O valor típico de  $a$  para os materiais ferromagnéticos é  $\sim 3 \text{ \AA} = 3 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Logo,  $B \sim 10^{-1} \text{ T}$ , que é  $\sim 10^4$  vezes menor do que os valores encontrados para  $\mu_0 WM$ . Assim, o "campo interno" não está associado a uma interação magnética.

A natureza do campo interno só foi elucidada pela teoria quântica: sua explicação foi proposta em 1927 por Heisenberg. Como vimos, os efeitos giromagnéticos, como o efeito Einstein-de Haas, mostram que o ferromagnetismo se origina dos *spins* dos elétrons, pois dão uma razão giromagnética muito próxima da do spin ( $g = 2$ ).

Os spins desempenham um papel muito importante na explicação da *ligação química covalente*, como a ligação entre dois átomos de H na molécula  $H_2$ .



Cada átomo contém 1 elétron, e os dois elétrons funcionam [fig. 11.12(a)] como uma espécie de "cola" para ligar os dois prótons (núcleos do H) na molécula, tendendo a ficar ambos *entre* eles, e assim aproximá-los um do outro, devido à *atração coulombiana* elétron-próton [ficando de lados opostos, como na fig. 11.12(b), tenderiam a separá-los].

**Figura 11.12** Ligação covalente (a) por elétrons de spins opostos

Entretanto, devido ao princípio de Pauli, para que dois elétrons sejam encontrados na mesma região (entre os núcleos), eles devem ter *spins opostos* (antiparalelos). Logo, embora a energia da ligação covalente seja *coulombiana* (muito maior do que a magnética), ela se origina da *correlação* entre as *direções dos spins* dos elétrons nos dois átomos de H que formam a molécula: eles devem ser *antiparalelos*, dando spin resultante = 0. Como o momento angular orbital do elétron no átomo de H também é = 0, o momento angular total da molécula de  $H_2$  é = 0, o que explica ser ela *diamagnética*.

Vemos assim que existe uma forte tendência para que os spins de elétrons em átomos vizinhos se alinhem *antiparalelamente* entre si, e que a energia associada a esta força é *coulombiana*, muito maior do que a magnética, portanto capaz de explicar o "campo interno" elevado.

O problema é que isso levaria ao *antiferromagnetismo*, e não ao ferromagnetismo, em que a tendência dos spins vizinhos é a se alinharem *paralelamente*, e não antiparalelamente. Efetivamente existem substâncias antiferromagnéticas, como o cromo, mas como explicar que a interação entre spins leve ao alinhamento paralelo?

A explicação mais aceita atualmente é que, além dos elétrons "magnéticos" do material, que pertencem a uma camada atômica interna (incompletamente preenchida), é preciso levar em conta elétrons de condução, associados à camada externa (Fe, Co e Ni são condutores). Um elétron magnético de um átomo, com uma dada orientação do spin ( $\uparrow$ ), tende a alinhar o spin de um elétron de condução antiparalelamente ao seu ( $\downarrow$ ). Este elétron pode deslocar-se livremente até um átomo vizinho, interagindo com um elétron magnético e por sua vez orientando-o antiparalelamente ao seu próprio spin ( $\uparrow$ ). Daí resulta uma interação efetiva entre os elétrons magnéticos de dois átomos vizinhos, tendente a alinhá-los ( $\uparrow\uparrow$ ); os elétrons de condução servem como intermediários.

O alinhamento domina abaixo da temperatura de Curie  $\Theta$ : para  $T$  tendendo a  $\Theta$  por valores superiores, a lei de Curie-Weiss daria  $\chi_m \rightarrow \infty$ , ou seja, bastaria um campo externo muito pequeno para alinhar os dipolos magnéticos. Para  $T < \Theta$ , teríamos alinhamento completo (magnetização espontânea), correspondendo à saturação, na ausência de campo externo. Como explicar, então, que se tenha ferro (para o qual  $\Theta = 1.388$  K) desmagnetizado à temperatura ambiente, e que se tenha de aplicar um campo  $\mathbf{B}$  externo para magnetizá-lo?

### Os domínios de Weiss

Uma amostra macroscópica de Fe é formada de numerosos microcristais; a estrutura cristalina é cúbica, mas os eixos dos microcristais na amostra policristalina estão orientados em direções distribuídas ao acaso.

A *anisotropia* de um monocristal implica que existem direções preferenciais de orientação para  $\mathbf{M}$ , as *direções de fácil magnetização*. Pierre Weiss postulou em 1907 a existência de *domínios*, em cada um dos quais (para  $T < \Theta$ ) os spins (e momentos  $\mathbf{m}$  associados) estão todos alinhados numa direção de fácil magnetização, *saturando*  $\mathbf{M}$ . O tamanho típico de um desses domínios de Weiss é  $\sim 10^{-6} \text{ cm}^3$  a  $10^{-2} \text{ cm}^3$ , e um microcristal pode ser formado de vários domínios alinhados em diferentes direções de fácil magnetização.

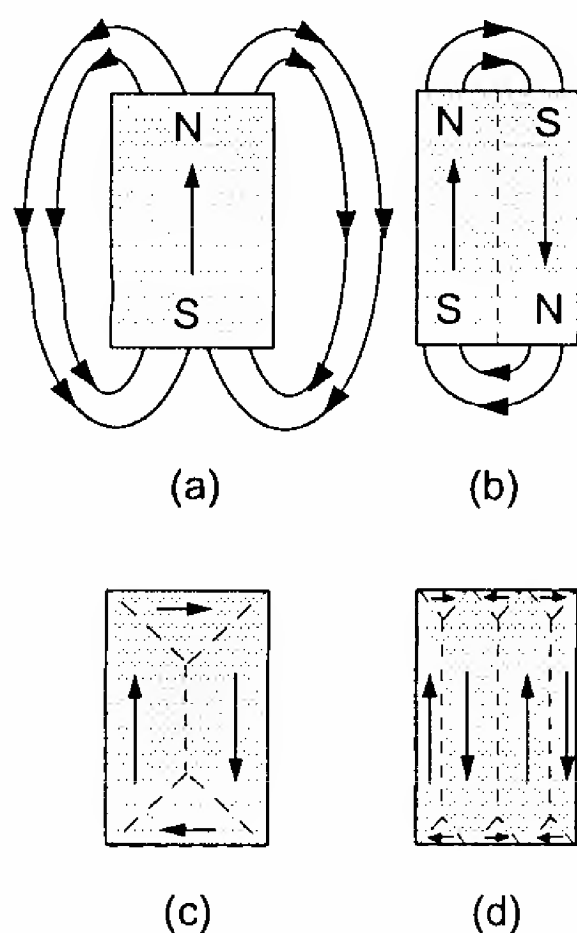


Figura 11.13 Domínios de Weiss

Por que razão todos os domínios não se alinham numa mesma orientação, como na fig. 11.13(a)? Isso produziria um campo  $\mathbf{B}$  mais intenso fora do material (portanto requerendo mais energia) do que em (b), onde há 2 domínios em sentidos opostos. O campo  $\mathbf{B}$  fica ainda mais confinado com a divisão (c) em 4 domínios ou (d) em 10, reduzindo a energia magnética.

Entretanto, é preciso também *pagar* um preço em energia, à medida que se aumenta o número de domínios na subdivisão. Com efeito, na parede que separa dois domínios contíguos (----- na fig. 11.13), os spins apontam em direções diferentes (na realidade, a mudança é gradual, ao longo de várias camadas atômicas), embora a interação entre eles favoreça o paralelismo. Há portanto um gasto de energia para formar uma tal *parede de Bloch*, proporcional à *área* da parede. Já a redução

cas), embora a interação entre eles favoreça o paralelismo. Há portanto um gasto de energia para formar uma tal *parede de Bloch*, proporcional à *área* da parede. Já a redução



da energia magnética externa é proporcional ao *volume* do domínio. O número e formato dos domínios em que o microcristal se divide depende da competição entre estes dois fatores e também das direções de fácil magnetização (efeito de *magnetostrição*).

Com base nesse modelo, podemos explicar qualitativamente as características das curvas de magnetização. Na amostra policristalina inicialmente desmagnetizada, os microcristais e seus domínios estão orientados ao acaso. Basta aplicar um campo externo  $\mathbf{B}$  fraco para que as direções de fácil magnetização mais próximas da direção de  $\mathbf{B}$  sejam favorecidas, levando a um *crescimento dos domínios* nessas direções, com um correspondente *deslocamento das paredes de Bloch* (não uma rotação, que exigiria energia maior). Assim, a susceptibilidade inicial é grande, e a porção inicial da curva é *reversível*.

Entretanto, para valores maiores de  $\mathbf{B}$ , começam a exercer um efeito as *imperfeições* do material: defeitos de vários tipos na estrutura cristalina, tensões internas, impurezas, etc. Esses defeitos funcionam como *barreiras* que impedem o deslocamento das paredes de Bloch, precisando de um acréscimo finito  $\Delta \mathbf{B}$  do campo externo para serem transpostas, o que acontece bruscamente e leva a um efeito irreversível, acompanhado de dissipação de energia. A energia é dissipada em correntes de Foucault, provocadas pelas variações bruscas de fluxo magnético, e em ondas sonoras associadas às variações de tensões mecânicas com o movimento das paredes. A magnetização cresce mais lentamente.

Finalmente, é atingido o patamar da curva, correspondente à saturação: variações grandes de  $\mathbf{B}$  produzem variações pequenas de  $\mathbf{M}$ , representando a *reorientação* gradual dos microcristais e domínios ainda não alinhados com  $\mathbf{B}$ .

Quando voltamos a reduzir  $\mathbf{B}$ , o mesmo efeito de "atrito" das paredes de domínios com imperfeições da rede impede que os domínios voltem a desorientar-se de todo, explicando a *remanência* e o efeito de *histerese*. É preciso aplicar um campo em sentido inverso para eliminar a magnetização residual: esta *coercividade* é tanto maior quanto mais "duro" o material, ou seja, quanto mais imperfeições ele tem. O resfriamento brusco de uma amostra aquecida gera *tensões internas* que aumentam a "dureza" magnética, o que explica a dependência do tratamento térmico dado ao material.

Os domínios de Weiss podem ser visualizados com o auxílio de uma técnica devida a F. Bitter (1932): espalha-se pó de limalha de Fe (por exemplo), muito fino, sobre uma superfície cuidadosamente polida do cristal e observa-se a superfície ao microscópio. As partículas do pó aderem às paredes de Bloch, pois nelas existem campos magnéticos inhomogêneos fortes que as atraem. Isso permite fotografar a estrutura e inclusive observar os movimentos das paredes quando o campo magnético é aplicado.

Também é possível evidenciar a natureza descontínua (embora com saltos muito pequenos) do crescimento de  $M$  com  $H$  na região intermediária da curva de magnetização. Para isso, enrola-se uma bobina em torno do material ferromagnético, a fim de captar as pequenas variações de fluxo magnético associadas às variações bruscas  $\Delta M$ : as variações

da corrente induzida correspondente são amplificadas e levadas a um alto-falante, aparecendo como um ruído tipo crepitação (*efeito Barkhausen*).

## 11.8 Circuitos magnéticos

Entre as aplicações importantes do ferromagnetismo, destacam-se o uso de núcleos de materiais ferromagnéticos em bobinas e transformadores e a aplicação a eletroímãs e ímãs permanentes.

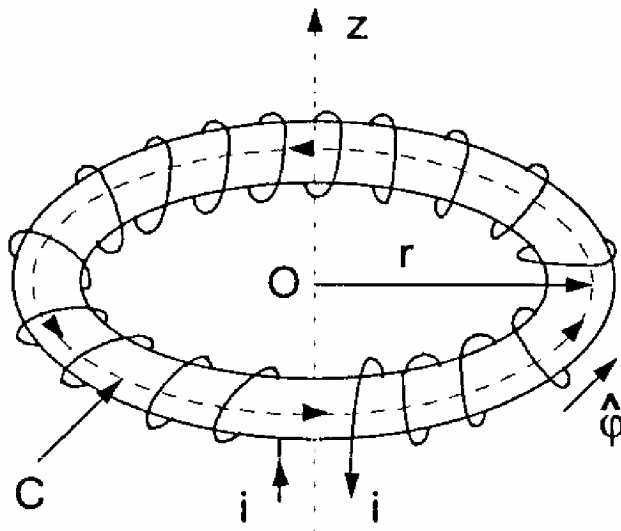


Figura 11.14 Anel de Rowland

Consideremos o problema já tratado de uma *bobina toroidal*, mas desta vez enrolada sobre um núcleo ferromagnético, e percorrida por uma corrente  $i$  (anel de Rowland, fig. 11.14). Como vimos, para  $\mathbf{H}$  (dentro ou fora do núcleo), as únicas fontes são correntes livres, de modo que, para um circuito  $C$  qualquer,

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (11.8.1)$$

onde  $I$  é a intensidade de corrente (livre) *total* através de  $C$ .

O circuito  $C$  da fig. 11.14 (círculo mediano de raio  $r$ , interno ao toróide, com centro em  $O$ , centro do toróide) é atravessado pelas  $N$  espiras do enrolamento, e  $\mathbf{H}$ , ao longo de  $C$ , é tangencial,  $\mathbf{H} = H \hat{\phi}$ , o que dá

$$2\pi r H = Ni \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{Ni}{2\pi r}, \mathbf{H} = H \hat{\phi} \end{array} \right. \quad (11.8.2)$$

o mesmo valor, independentemente do material do núcleo.

O valor correspondente de  $\mathbf{B}$  é  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , onde  $\mu$  depende de  $\mathbf{H}$  e da história anterior do material (curva de magnetização). Se  $S$  é a área da secção circular do toróide, o fluxo de  $\mathbf{B}$  através das  $N$  espiras (supondo o raio da secção  $\ll r$ , de forma que  $\mathbf{B}$  quase não varie através da secção) é

$$\Phi = NBS = \mu \cdot \frac{N^2 S}{l} i \quad (11.8.3)$$

onde  $l \equiv 2\pi r$  é o comprimento do circuito  $C$  (linha mediana do toro).

Como  $\Phi = L i$ , onde  $L$  é a auto-indutância da bobina, vemos que

$$\boxed{\frac{L}{L_0} = \frac{\mu}{\mu_0}} \quad (11.8.4)$$

onde  $L_0$  é a auto-indutância calculada anteriormente, para um núcleo não-magnético.

Logo, um núcleo ferromagnético *aumenta*  $L$  por um fator igual à *permeabilidade magnética relativa*  $\kappa_m = \mu / \mu_0 > 1$ , o que permite reduzir as dimensões da bobina e a quantidade de fio necessária (portanto, também a perda ôhmica).

Se  $i$  está variando com o tempo, a taxa de variação do fluxo correspondente é

$$\boxed{-\xi = \frac{d\Phi}{dt} = N S \frac{dB}{dt}} \quad (11.8.5)$$

onde  $\xi$  é a força eletromotriz induzida sobre toda a bobina. A taxa de fornecimento de energia (potência) necessária para produzir essa variação temporal de  $i$  é

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -\xi i = N S i \frac{dB}{dt} = \frac{Ni}{l} S l \frac{dB}{dt}} \quad (11.8.6)$$

onde  $l = 2 \pi r$  é o comprimento médio do toróide ( $r$  = raio médio). Como  $Ni / l = H$  e  $S l = v$

é o volume do toróide, vemos que

$$\boxed{dU = (H dB) v} \quad (11.8.7)$$

é a variação de energia correspondente. Assim, a variação da *densidade de energia*  $u$  é (como  $\mathbf{B}$  é paralelo a  $\mathbf{H}$ )

$$\boxed{du = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}} \quad (11.8.8)$$

No vácuo,  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0$  e isto leva novamente à expressão já encontrada para a *densidade de energia magnética*:

$$du_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{B} \quad \left\{ \quad \boxed{\mu_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}} \right. \quad (11.8.9)$$

Na presença do material ferromagnético, a expressão (11.8.8) tem uma interpretação geométrica em termos da curva de magnetização  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$  [como  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M}$ , é outra forma de representar  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ ].

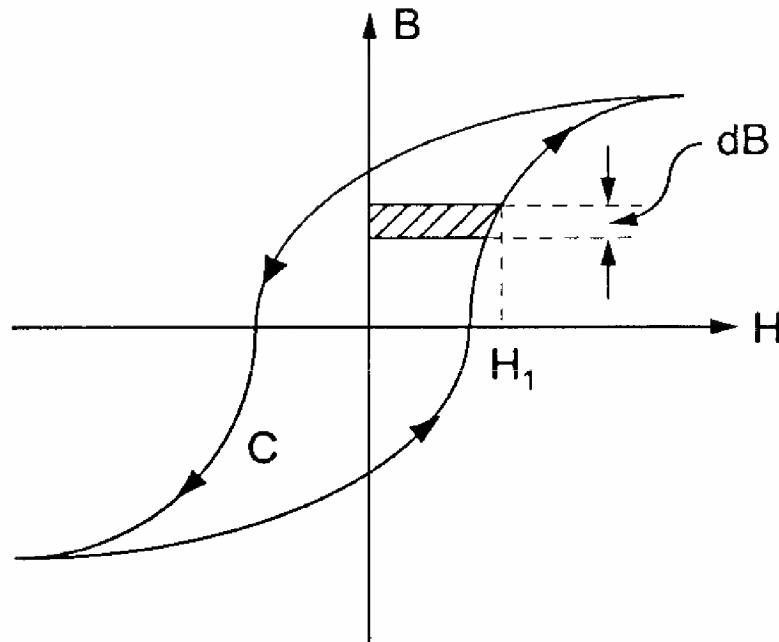


Figura 11.15 Ciclo de histerese e energia

Vemos na fig. 11.15 que  $HdB$  representa a área hachurada (sempre positiva, porque  $\mathbf{B}$  é paralelo a  $\mathbf{H}$ ). Logo,

$$\oint_C H dB = \text{área dentro do ciclo de histerese} \quad (11.8.10)$$

representa a energia total fornecida ao sistema durante o ciclo, que é *dissipada*, como vimos, em correntes de Foucault e

ondas sonoras, convertendo-se em calor (vibração térmica da rede cristalina). A área dentro do ciclo representa portanto a *perda de histerese*, que queremos minimizar num transformador, por exemplo. Para isso, seu núcleo é de ferro doce (reduzindo a área do ciclo) e laminado (reduzindo o efeito das correntes de Foucault).

Voltemos agora à expressão (11.8.3) do fluxo, notando que

$$Ni = 2\pi rH = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathfrak{M} \quad (11.8.11)$$

onde  $\mathfrak{M}$  chama-se a *força magnetomotriz* associada ao circuito  $C$ . Note que é definida em termos de  $\mathbf{H}$ , não de  $\mathbf{B}$ .

O fluxo  $\Phi = N\Phi_1$ , onde  $\Phi_1$  é o fluxo de  $\mathbf{B}$  através de *uma espira*, ou, o que é equivalente, através da secção reta do solenóide. Logo, a (11.8.3) dá

$$\Phi_1 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu \frac{S}{l} \frac{\mathfrak{M}}{Ni} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M} = \mathcal{R} \Phi_1 \end{array} \right. \quad (11.8.12)$$

onde

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

chama-se *relutância* magnética do toróide ferromagnético.

A (11.8.12) é análoga a

$$\mathcal{E} = Ri \quad (\text{lei de Ohm})$$

onde  $R$  é a resistência de um circuito de comprimento  $l$  e secção transversal de área  $S$ , dada pela (6.3.6),

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

onde  $\sigma$  é a condutividade do material do circuito.

Temos portanto as seguintes analogias:

Circuito elétrico	$\sigma$	$i =$	$\int_C \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$	$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	$R$	$\mathbf{j}$
Circuito magnético	$\mu$	$\Phi_1 =$	$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	$\mathfrak{M} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathcal{R}$	$\mathbf{B}$

Embora essas analogias sejam muito úteis na análise de circuitos contendo materiais magnéticos, representam uma *aproximação*, cujas limitações devem ser levadas em conta. Num fio condutor, as dimensões da secção transversal são muito menores que o comprimento do fio, o que não é geralmente verdade para um circuito magnético. Assim, o cálculo da relutância de um circuito de secção variável por

$$\mathcal{R} = \int \frac{dl}{\mu S} \quad (11.8.14)$$

não é uma aproximação tão boa quanto para circuitos elétricos. Além disto,  $\mathfrak{M}\Phi_1$  não representa uma taxa de dissipação de energia (como  $\mathcal{E}i$  para um circuito resistivo).

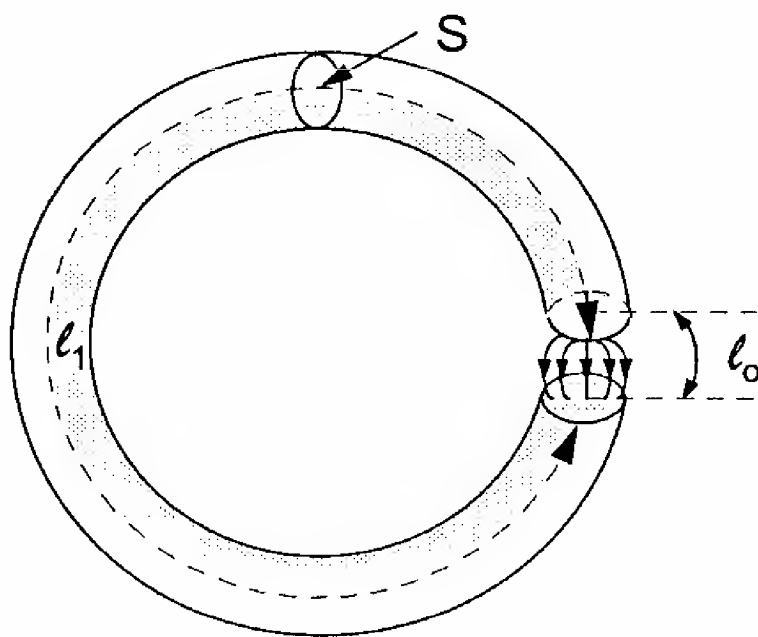


Figura 11.16 Entreferro

### Eletroímã

Suponhamos que se abra um interstício ("entreferro") de comprimento  $l_0$  no toróide do exemplo anterior. (Na fig. 11.16, não foi desenhado o enrolamento, para simplificar). Se  $l_1$  é o comprimento médio do anel cortado, teremos então

$$\mathcal{R} = \frac{l_1}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S} = \frac{1}{\mu_0 S} \left( l_0 + \frac{l_1}{\kappa_m} \right) \quad (11.8.15)$$

admitindo que  $S$  não muda no entreferro, ou seja, ignorando o "alastramento" das linhas de força de  $\mathbf{B}$  no interstício, ilustrado na fig. 11.16, o que requer  $(l_0)^2 < S$ .

Se (por exemplo, num caso típico)  $l_1/l_0 \sim 50$  e  $\kappa_m \sim 5 \times 10^3$ , o termo  $l_1/\kappa_m$  é  $\sim 1\%$  de  $l_0$  e pode ser desprezado, levando a

$$\mathcal{R} \approx \frac{l_0}{\mu_0 S} \quad (11.8.16)$$

de forma que a relutância é quase toda devida ao entreferro (é como um circuito elétrico com duas resistências em série, uma muito menor que a outra).

Como o fluxo magnético  $\Phi_1$  (análogo de  $i$ ) é o mesmo através de todo o circuito ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$  é o análogo de  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  para correntes estacionárias), a força magnetomotriz  $\mathfrak{M}$  aparece quase toda através do entreferro, amplificando por um fator  $l_1/l_0$  o campo que seria produzido pelo mesmo solenóide na ausência do núcleo ferromagnético.

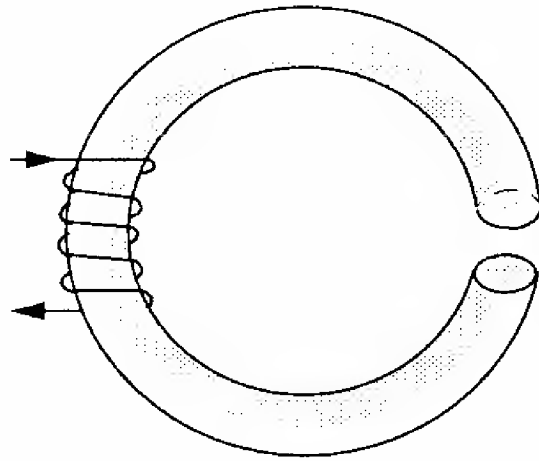


Figura 11.17 Eletroímã

Vemos além disto que não é preciso enrolar a bobina em torno de *todo* o toróide: basta que esteja enrolada numa porção dele (fig. 11.17), porque neste caso a relutância "vista" pela bobina é a de dois circuitos *em paralelo*, um de alta relutância, através do ar (por fora do toróide) e outro de baixa relutância através do material ferromagnético, e quase todo o fluxo passará pelo toróide.

Pela mesma razão, uma caixa fechada com paredes ferromagnéticas protege o seu interior de efeitos magnéticos externos (*blindagem magnética*), porque a baixa relutância das paredes canaliza quase todo o fluxo para elas, livrando o interior de campos magnéticos.

### Ímã permanente

Neste caso, não há correntes livres (como as de condução na bobina), de forma que

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \left\{ \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \mathfrak{M} \right. \quad (11.8.17)$$

ou seja, a força magnetomotriz é  $= 0$ .

Tomando para  $C$  o mesmo circuito fechado anterior no toróide com entreferro, resulta

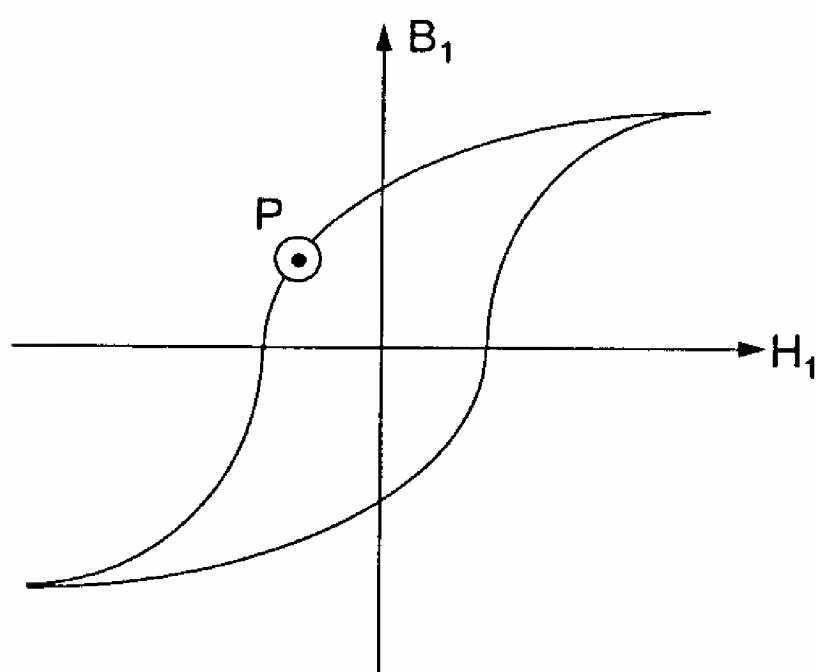
$$H_1 l_1 + H_0 l_0 = 0 \quad (11.8.18)$$

onde  $\mathbf{H}_1$  é o campo ao longo da linha mediana  $C$ , dentro do toróide, e  $\mathbf{H}_0$  o campo no entreferro. Logo,

$$H_1 = -\frac{l_0}{l_1} H_0 \quad (11.8.19)$$

mostrando que  $\mathbf{H}_1$  (dentro) tem sentido oposto a  $\mathbf{H}_0$  (fora) nas interfaces do toróide, e  $|\mathbf{H}_1| \ll |\mathbf{H}_0|$  numa situação típica.

Por outro lado, no entreferro,  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  tem a mesma orientação que  $\mathbf{H}_0$ , normal às interfaces ao longo da linha mediana. Como  $\text{Div } \mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1) = 0$  (a componente normal de  $\mathbf{B}$  é contínua),  $\mathbf{B}_1$  também tem a orientação de  $\mathbf{B}_0$  (e  $\mathbf{H}_0$ ), sendo portanto *antiparalelo* a  $\mathbf{H}_1$ .



Assim, no ciclo de histerese  $B_1 \times H_1$ , o ímã permanente opera num ponto como  $P$  (fig. 11.18), situado no 2.º quadrante. O campo  $\mathbf{H}_1$ , que atua em sentido oposto a  $\mathbf{B}_1$ , é chamado por isso de *campo desmagnetizante*.

Figura 11.18 Ponto de operação  $P$  para ímã permanente

A fig. 11.19 compara as linhas de força de  $\mathbf{B}$  e de  $\mathbf{H}$  num ímã permanente em forma de barra cilíndrica. As de  $\mathbf{B}$  são fechadas e de mesmo sentido dentro e fora do ímã. Já as de  $\mathbf{H}$ , embora semelhantes às de  $\mathbf{B}$  na região *externa*, onde  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ , têm sentido contrário dentro do ímã (campo desmagnetizante). Há portanto uma descontinuidade da componente *normal* de  $\mathbf{H}$  na interface, correspondendo a uma densidade superficial de "cargas magnéticas", associada à

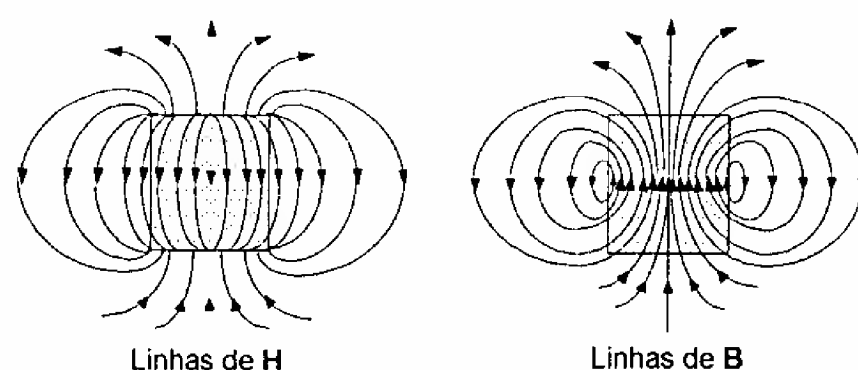


Figura 11.19 Linhas de  $\mathbf{B}$  e de  $\mathbf{H}$  num ímã permanente cilíndrico

descontinuidade na magnetização. Com efeito, como vimos na (11.2.5),

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M}} \quad (11.8.20)$$

o que dá, com  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$  orientado de dentro (1) para fora (0) do ímã ( $\equiv \hat{\mathbf{n}}$ , a normal externa), e com  $\mathbf{M}_0 = 0$ ,

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{H} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1) = -\operatorname{Div} \mathbf{M} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}_1} \quad (11.8.21)$$

o que *simula* uma distribuição superficial de "cargas magnéticas" como fontes de  $\mathbf{H}$ , embora saibamos que tais cargas não existem.

Como  $\mathbf{M}_1$  tem aproximadamente a mesma orientação nos dois pólos do ímã, e  $\hat{\mathbf{n}}$  tem sentidos opostos, as "cargas magnéticas" também têm sinais contrários, correspondendo ao "pólo N" e "pólo S" do ímã permanente.

Antigamente, considerava-se  $\mathbf{H}$  como o campo magnético fundamental, análogo de  $\mathbf{E}$ , e  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  como análogo a  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ . Entretanto, vemos que as fontes de  $\mathbf{H}$  são "cargas magnéticas", que não têm existência real (monopolos), ao passo que as fontes de  $\mathbf{B}$  são correntes. Sabemos hoje que  $\mathbf{B}$  é o campo fundamental, o que recebe nova confirmação na relatividade restrita, onde  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  aparecem como aspectos diferentes do mesmo campo fundamental, o *campo eletromagnético*. As definições de  $\mu$  e  $\mu_0$  baseiam-se na analogia histórica incorreta; daí a correspondência  $\epsilon_0 \leftrightarrow 1/\mu_0$ .

## PROBLEMAS

1. A susceptibilidade molar do gás hélio é  $-2,4 \times 10^{-11}$ . Ache a razão do raio quadrático médio  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  da órbita eletrônica no átomo de hélio ao raio de Bohr  $a_0 = 0,0529$  nm, que é o raio da primeira órbita de Bohr no átomo de hidrogênio (Cap. 2, Probl. 3).

2. Verifica-se que a contribuição máxima da magnetização do ferro ao valor de  $B$  no material é da ordem de 2T. A massa atômica do ferro é 55,8 e sua densidade é  $7,9 \text{ g/cm}^3$ . (a) Se cada elétron contribui com 1 magneton de Bohr [cf. (11.7.7)], quantos elétrons em cada átomo de ferro contribuem para a magnetização? (b) Se o ferro fosse paramagnético, de que ordem de grandeza seria sua susceptibilidade a 300 K? Compare com ordens de grandeza típicas da susceptibilidade do ferro.

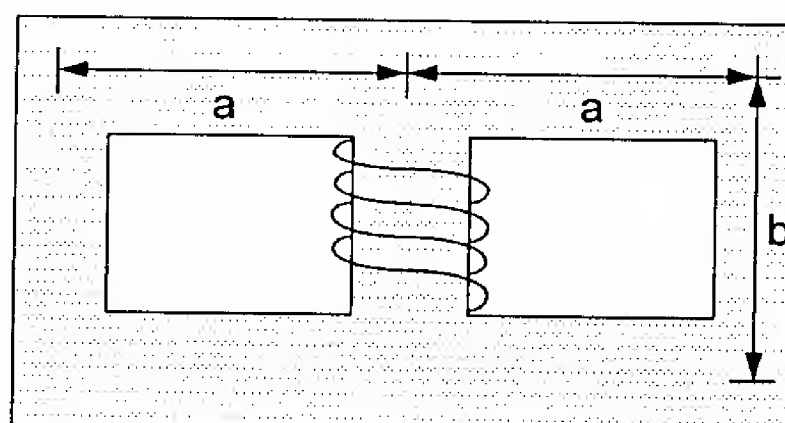
3. Demonstre que: (a) a energia armazenada no anel de Rowland (Seç. 11.8) é  $\frac{1}{2} \mathcal{R} (\Phi_1)^2$ , onde  $\mathcal{R}$  é a relutância magnética e  $\Phi_1$  é o fluxo de  $B$  através da secção reta; (b) a auto-indutância do anel é  $L = N^2/\mathcal{R}$ .



4. Um anel de Rowland de ferro tem 10 cm de diâmetro médio e nele está aberto um entreferro de 1 mm de comprimento. Quando se faz passar uma corrente de 1 A por uma bobina de 1000 espiras enrolada no anel, o campo  $B$  no entreferro é de 1 T. Desprezando o alastramento das linhas de força no entreferro, calcule: (a) a permeabilidade magnética relativa do ferro nestas condições; (b) o campo  $H$  no interior do ferro; (c) a razão do campo  $H$  no entreferro ao seu valor dentro do material.

5. No problema anterior, a área da secção reta do anel é de  $1 \text{ cm}^2$ . Calcule: (a) a energia armazenada no interior do ferro; (b) a energia armazenada no entreferro; (c) a auto-indutância do sistema.

6. No circuito magnético da figura, a secção reta é constante, a permeabilidade magnética do material é  $\mu$  e a corrente na bobina de  $N$  espiras é  $i$ . Calcule o campo  $B_1$  no braço central e o campo  $B_2$  nos demais braços.



7. Mostre que, no interior de um ímã permanente (Seç. 11.8), podemos introduzir para o campo  $\mathbf{H}$  um novo potencial escalar magnético  $\xi$  tal que  $\mathbf{H} = -\nabla \xi$ , onde  $\xi$  está relacionado com a magnetização  $\mathbf{M}$  do meio por

$$\Delta \xi = \text{div } \mathbf{M} \equiv -\rho_m$$

e  $\rho_m$  simula uma densidade de ‘carga magnética’. Comparando com a equação de Poisson (4.6.6) da eletrostática, resulta que podemos calcular  $\mathbf{H}$ , se  $\mathbf{M}$  for conhecido, usando um análogo da lei de Coulomb, em que  $\rho_m$  faz o papel de  $\rho/\epsilon_0$ .

8. Como aplicação do problema anterior, considere um ímã permanente em forma de barra cilíndrica de raio  $a$  e comprimento  $l \gg a$ . Nessas condições, podemos admitir, como aproximação, que a barra está uniformemente magnetizada, ou seja, que  $\mathbf{M}$  dentro da barra é um vetor constante. Pela (11.8.21), a distribuição de ‘carga magnética’ equivalente tem densidade superficial constante nas duas extremidades circulares da barra (‘norte’ e ‘sul’) e é nula fora delas. Usando esse método, calcule  $\mathbf{B}$ : (a) no centro da barra; (b) no centro da face ‘norte’. Verifique que o resultado (b) é aproximadamente a metade do resultado (a).

# 12

## AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

### 12.1 Recapitulação

Todos os fenômenos eletromagnéticos descritos até aqui decorrem de um conjunto de equações básicas para o campo eletromagnético. Vimos que essas equações podem ser formuladas tanto em forma *integral* quanto em forma *diferencial* (ou *local*),

usando dois resultados de análise vetorial deduzidos nos caps. 3 e 4: o *teorema da divergência* (fig. 12.1)

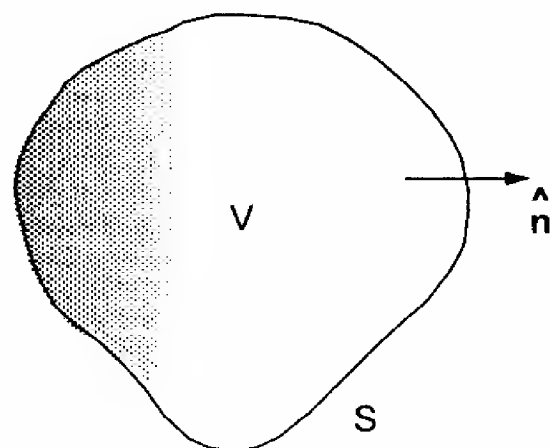


Figura 12.1 Teorema da divergência

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \text{div } \mathbf{v} dV \quad (12.1.1)$$

[ $S$  = superfície fechada;  $V$  = volume interior a  $S$ ;  $\hat{\mathbf{n}}$  = versor da normal externa] e o *teorema do rotacional*

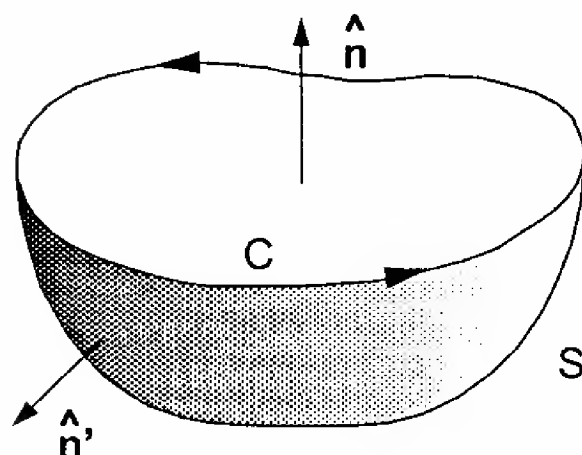


Figura 12.2 Teorema do rotacional

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (12.1.2)$$

[ $C$  = curva orientada;  $S$  = *qualquer* superfície de contorno  $C$ ;  $\hat{\mathbf{n}}$  = normal orientada a  $S$ ].

Neste último resultado,  $S$  é *qualquer* porque, para uma superfície fechada,

$$\oint_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$$

uma vez que vale a identidade

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0 \quad (12.1.3)$$

Em forma integral, as equações básicas vistas até aqui, para *campos eletromagnéticos no vácuo*, são:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (12.1.4)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad (12.1.5)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_C \quad (12.1.6)$$

Na (12.1.4) (*lei de Gauss*),  $q$  é a carga total contida dentro de  $S$ . Embora obtida na eletrostática, é natural generalizá-la, admitindo que o fluxo de  $\mathbf{E}$  continua medindo a carga total para campos variáveis com o tempo. A (12.1.5) exprime a.

Finalmente, vimos a *lei da indução de Faraday*.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (12.1.7)$$

Em forma diferencial, temos as equações correspondentes: (a primeira é a *equação de Poisson*):

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12.1.8)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (12.1.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (12.1.10)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.1.11)$$

às quais devemos acrescentar a expressão da *força de Lorentz*:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (12.1.12)$$

ou da densidade de força

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (12.1.13)$$

Vimos também que, num dielétrico, com polarização (densidade de momento de dipolo elétrico)  $\mathbf{P}$ , devida ao deslocamento das cargas ligadas (aos átomos) sob a ação do campo, há uma *densidade de carga de polarização*  $\rho_p$  dada por

$$\rho_p = -\text{div } \mathbf{P} \quad (12.1.14)$$

e que o deslocamento destas cargas representa uma *corrente de polarização*, de densidade dada por

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (12.1.15)$$

satisfazendo a equação de continuidade,

$$\text{div } \mathbf{j}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \quad (12.1.16)$$

Como a carga de polarização também produz um campo elétrico, a equação de Poisson, dentro de um dielétrico, fica

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \quad (12.1.17)$$

ou

$$\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \epsilon_0 \text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (12.1.18)$$

onde  $\mathbf{D}$  é o vetor deslocamento e  $\rho$  é a densidade de carga livre.

Todos esses resultados foram obtidos nos capítulos anteriores.

## 12.2 Maxwell e a corrente de deslocamento

James Clerk Maxwell nasceu na Escócia em 1831. De família abastada, formou-se na Universidade de Cambridge, onde teve uma excelente formação matemática.

A leitura das “Pesquisas Experimentais sobre Eletricidade” de Faraday, onde os fenômenos eram descritos na linguagem das linhas de força, inventada por Faraday, impressionou-o fortemente, e ele procurou dar uma formulação matemática às idéias de

Faraday desde o seu primeiro trabalho (1856). Há um certo paralelismo entre a dupla Galileu-Newton e a dupla Faraday-Maxwell.

Em seus trabalhos, Maxwell formulou os resultados em termos dos operadores vetoriais  $\text{div}$  e  $\text{rot}$ , que haviam sido empregados anteriormente por Stokes.

Uma de suas observações foi que, da mesma forma que as cargas de polarização num dielétrico produzem um campo elétrico, a *corrente de polarização* deve produzir um campo magnético.

Logo, a lei de Ampère, num meio dielétrico, deve ser reformulada para:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_p) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (12.2.1)$$

ou, sob a forma integral,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (12.2.2)$$

onde  $S$  é *qualquer* superfície de contorno  $C$ .

Para ver de que forma a corrente de polarização poderia manifestar-se, consideremos o que acontece durante a carga ou descarga de um capacitor com um dielétrico entre as placas.

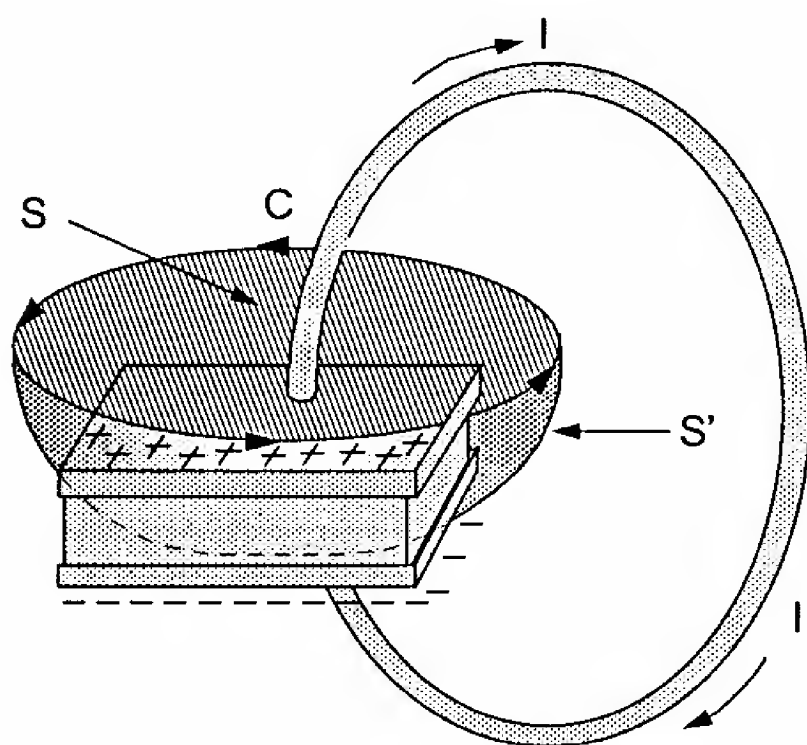


Figura 12.3 Descarga de um capacitor

A figura 12.3 representa a descarga de um capacitor e mostra uma curva fechada  $C$  que envolve o fio. A circulação de  $\mathbf{B}$  ao longo de  $C$  deve ser igual ao 2.º membro da equação precedente, *qualquer que seja* a superfície  $S$  que se apoia sobre o contorno  $C$ .

Se tomarmos  $S$  fora do capacitor, temos  $\mathbf{P} = 0$  (a 2.ª integral se anula) e  $I \neq 0$ . Que acontece se tomarmos, em lugar de  $S$ , a superfície  $S'$ , que passa por *dentro* do dielétrico, entre as placas? Neste caso, não há corrente de condução (su-

pondo o dielétrico perfeitamente isolante), ou seja,  $I = 0$ , mas  $\partial \mathbf{P} / \partial t \neq 0$ , de forma que, à primeira vista, o resultado seria consistente: o segundo termo do 2.º membro,

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S'} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

seria equivalente a  $\mu_0 I$ : a corrente, entre as placas, seria somente a corrente de polarização.

Mas consideremos agora o que acontece se *não houver* uma lâmina dielétrica entre as placas, mas somente o vácuo. Neste caso, chegaríamos a uma *contradição*, pois  $\mathbf{P} = 0$  e o 2.º membro seria  $= 0$ , tomando a superfície  $S'$ , embora seja  $\neq 0$  ( $= \mu_0 I$ ) quando se toma a superfície  $S$ !

A contradição também aparece tomando a forma diferencial das equações, para o vácuo. Na ausência de um dielétrico (polarização), teríamos apenas nessa região a lei de Ampère

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}} \quad (12.2.3)$$

e, tomando div de ambos os membros,

$$0 = \text{div rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{div } \mathbf{j} \Rightarrow \text{div } \mathbf{j} = 0$$

Mas as cargas sobre as placas (cargas *livres*) estão variando com o tempo. Logo, deveríamos ter (contradizendo este último resultado)

$$\boxed{\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (12.2.4)$$

para haver consistência com a conservação de carga elétrica.

Por outro lado, pela equação de Poisson,

$$\rho = \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{E} = \text{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

de modo que a equação de continuidade pode ser escrita

$$\boxed{\text{div} \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0} \quad (12.2.5)$$

Logo, teremos consistência com a conservação da carga se, em lugar da lei de Ampère, supusermos que, no vácuo,

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (12.2.6)$$

e, na presença de um dielétrico com polarização  $\mathbf{P}$ ,

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})} \quad (12.2.7)$$

onde o último termo entre parênteses é o mesmo que aparece na equação de Poisson para o dielétrico:

$$\boxed{\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 \left( \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)} \quad (12.2.8)$$

O termo em  $(\partial/\partial t)(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$ , introduzido por Maxwell, foi chamado por ele de *corrente de deslocamento*. Para a corrente de polarização, este é um nome razoável, pois tem como origem o deslocamento das cargas de polarização. Mas, na ausência do dielétrico, teríamos apenas a "corrente de deslocamento no vácuo",  $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ , e cabe a pergunta: deslocamento do que?

Historicamente, Maxwell introduziu esse termo em dois trabalhos publicados em 1861-1862, onde construiu um *modelo mecânico* para o campo eletromagnético no vácuo, imaginando o vácuo – na época concebido como um meio hipotético que se chamava *éter* – como um meio elástico.

Os tubos de linhas de força magnéticas, introduzidos por Faraday, eram concebidos como células tubulares cheias de um fluido em rotação em torno das linhas de força magnéticas. Para que tubos adjacentes pudessem girar no mesmo sentido, com rolamento puro (sem deslizamento), Maxwell imaginou que, entre as paredes dos tubos, existissem (no vácuo), "rolamentos" esféricos, responsáveis pelas forças elétricas, cujos deslocamentos corresponderiam a correntes elétricas: daí o nome de "correntes de deslocamento no vácuo". Foi aplicando as leis da dinâmica de meios contínuos a esse "éter celular" que Maxwell chegou às suas equações.

Em seu trabalho fundamental de 1864, "Uma Teoria Dinâmica do Campo Eletromagnético", Maxwell descarta todo esse arcabouço mecânico, que lhe havia servido como modelo, e formula suas equações como as *leis dinâmicas do eletromagnetismo*:

"Tentei anteriormente descrever um tipo particular de movimento e de tensões mecânicas, combinados de tal forma que explicassem os fenômenos. Na presente memória, evito qualquer hipótese desse gênero... Entretanto, quando falo da energia do campo, é literalmente com esse significado... A questão que se coloca é: *onde se localiza essa energia?* Em nossa teoria, ela reside no campo eletromagnético..."

O sistema das equações de Maxwell *no vácuo* é então:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{(I)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{(II)} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{(III)} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{(IV)} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \quad (12.2.9)$$

e é consistente com a conservação da carga elétrica:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (12.2.10)$$

como se vê tomando  $\operatorname{div}$  da equação (I) e usando a (III).

A principal hipótese nova introduzida por Maxwell, o último termo da (I), não deve ser descrito como "corrente de deslocamento no vácuo".

Para vermos o que representa, consideremos uma região onde  $\mathbf{j} = 0$  e

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \neq 0$$

(como a região no vácuo entre as placas do capacitor plano sendo descarregado). Neste caso, a (I) fica

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (12.2.11)$$

e vemos que é análoga à lei da indução (II), com  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow -\mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}$ . A interpretação física é portanto:

*"Um campo elétrico (no vácuo) variável com o tempo produz um campo magnético".*

Este é um *novo efeito físico*, que foi *predito* por Maxwell, correspondendo a uma espécie de recíproco da lei de Faraday ("um campo magnético variável com o tempo produz um campo elétrico"). Como poderíamos observá-lo?

Num fio em que passa corrente alternada, por exemplo, temos a coexistência dos dois efeitos, pois  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ , e temos:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} &\rightarrow |\mathbf{j}| = j = \sigma |\mathbf{E}| \\ \mathbf{E} = \mathbf{E} e^{i\omega t} &\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E} \left\{ \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \approx \omega |\mathbf{E}| \right\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\left| \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|}{|\sigma \mathbf{E}|} \cong \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma} \cong \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \cdot \frac{\omega}{\sigma}} \quad (12.2.12)$$

Para valores típicos de  $\sigma, \geq 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ , e  $\omega \approx 377 \text{ Hz}$  ( $\nu = 60 \sim$ ), o 2.º membro é  $\leq 10^{-16}$ , ou seja, o termo novo produz efeitos inteiramente desprezíveis para correntes quase-estacionárias.



Este é um exemplo característico: os efeitos novos decorrentes do termo postulado por Maxwell são praticamente inobserváveis em variações com o tempo com períodos da ordem de  $10^{-2}$  ou  $10^{-3}$ , como as de correntes alternadas típicas.

## 12.3 A equação de ondas

Consideremos as equações de Maxwell no vácuo, numa região onde não há cargas nem correntes:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \text{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{(II)} \quad \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{(III)} \quad \text{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \text{(IV)} \quad \text{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

Vamos procurar soluções tão simples quanto seja possível, que só dependam de uma única coordenada e do tempo. Escolhemos o eixo  $z$  na direção dessa coordenada:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(z, t)$$

Para um vetor  $\mathbf{v}$  que só depende de  $z$  e  $t$ , temos

$$\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \left\{ \quad \boxed{\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z}} \right. \quad (12.3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \left\{ \quad \boxed{\text{rot} \mathbf{v} = -\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial v_x}{\partial z}} \right. \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12.3.3)$$

de modo que as equações de Maxwell ficam:

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & -\hat{x} \frac{\partial B_y}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{z} \right) \\
\text{(II)} \quad & -\hat{x} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{z} \\
\text{(III)} \quad & \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\
\text{(IV)} \quad & \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}
\tag{12.3.4}$$

As (I) e (III), (II) e (IV) dão

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 = \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t}
\tag{12.3.5}$$

de forma que  $E_z$  e  $B_z$  teriam de ser *constantes* (campo eletrostático uniforme e campo magnético estático uniforme). Não estamos interessados em soluções estáticas, de modo que tomamos:

$$E_z = B_z = 0
\tag{12.3.6}$$

As demais componentes dão dois sistemas independentes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{12.3.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_x}{\partial z} &= +\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\
\frac{\partial E_y}{\partial z} &= +\frac{\partial B_x}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{12.3.8}$$

o primeiro no par  $(E_x, B_y)$  e o segundo no par  $(B_x, E_y)$ . O segundo só difere do primeiro pelas substituições

$$\boxed{E_x \rightarrow E_y \quad ; \quad B_y \rightarrow -B_x} \quad (12.3.9)$$

de forma que basta resolver o primeiro.

No primeiro, tomando a derivada parcial da 1.<sup>a</sup> equação com respeito a  $z$  e da segunda com respeito a  $t$ , vem:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} &= -\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0} \quad (12.3.10)$$

e, tomando a derivada parcial da 1.<sup>a</sup> em relação a  $t$  e da segunda em relação a  $z$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= -\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} \end{aligned} \right\} \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0} \quad (12.3.11)$$

Logo, tanto  $E_x$  como  $B_y$  satisfazem a equação

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0} \quad (12.3.12)$$

e o mesmo vale para  $E_y$  e  $B_x$  no segundo sistema.

Logo, todas as componentes dos campos eletromagnéticos satisfazem a *equação de ondas unidimensional* (Física Básica 2, Sec. 5.2), com *velocidade de propagação*

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} \quad (12.3.13)$$

Como vimos,  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são obtidos por medidas *puramente eletromagnéticas* (força coulombiana entre cargas e força magnética entre correntes), com os resultados:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 &\equiv \frac{10^{-9}}{4\pi \times 8,98755} \frac{\text{F}}{\text{m}} \\ \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \end{aligned} \right\} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \equiv 8,98755 \times 10^{16} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

o que dá

$$v \cong 2,99792 \times 10^8 \text{ m / s} = c \quad (12.3.14)$$

que é o valor da *velocidade da luz no vácuo*.

Na época de Maxwell, o valor de  $c$  era conhecido pelas experiências com observações astronômicas dos satélites de Júpiter e por medições terrestres de Fizeau (usando uma roda dentada em rotação rápida e um espelho) e de Foucault (com um espelho girante e outro fixo), e o valor de  $\epsilon_0, \mu_0$  havia sido determinado por experiências puramente eletromagnéticas de Kohlrausch e Weber. As soluções acima contém pares de campos  $(E_x, B_y)$  e  $(E_y, B_x)$  sempre *transversais* à direção de propagação  $z$  das ondas.

Maxwell havia obtido seus resultados durante sua estadia numa casa de campo, e só verificou os valores numéricos ao regressar a Londres, onde passara a lecionar na Universidade. Em seu trabalho de 1862, ele escreveu:

"A velocidade das ondas transversais em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos eletromagnéticos dos Srs. Kohlrausch e Weber, concorda tão exatamente com a velocidade da luz, calculada pelos experimentos óticos do Sr. Fizeau, que é difícil evitar a inferência de que *a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos*". Ou seja, a luz é uma onda eletromagnética!

Este foi um dos grandes momentos da história da física. Eletricidade e magnetismo haviam evoluído em paralelo, como áreas diferentes, até que as experiências de Oersted mostraram que correntes elétricas produzem campos magnéticos, e que Faraday descobriu que campos magnéticos variáveis com o tempo produzem campos elétricos.

A unificação efetuada por Maxwell foi ainda mais abrangente: a ótica, até então uma disciplina inteiramente separada, passava a tornar-se um ramo do eletromagnetismo.

O efeito novo crucial para a obtenção das ondas eletromagnéticas foi a "corrente de deslocamento no vácuo", ou seja, a introdução por Maxwell do efeito "recíproco" da lei da indução: um campo elétrico variável com o tempo produz um campo magnético.

Com efeito: o campo magnético assim produzido também será variável no tempo; por conseguinte, produzirá por sua vez um campo elétrico variável... e assim por diante. O efeito é auto-sustentado: a onda se propaga!

## 12.4 Ondas eletromagnéticas planas

Vimos, ao discutir o movimento de cordas vibrantes (*Física Básica 2*, Seq. 5.3), que a solução geral da equação de ondas unidimensional,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (12.4.1)$$

é

$$f(z,t) = F(z-vt) + G(z+vt) \quad (12.4.2)$$

onde  $F$  e  $G$  são funções arbitrárias. Fisicamente,  $F$  representa um perfil qualquer de onda propagando-se no sentido de  $z$  positivo (onda caminhante *progressiva*) e  $G$  uma onda em sentido oposto (onda caminhante *regressiva*).

Vamos considerar uma solução do 1.º sistema, (12.3.7), que se propaga num único sentido, por exemplo, o sentido positivo do eixo  $z$  (usando  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ):

$$E_x(z,t) = E_x(z-ct) \quad (12.4.3)$$

Para obter a solução correspondente para  $B_y$ , substituímos esta expressão no sistema (12.3.7):

$$\begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{c} E'_x(\zeta) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = E'_x(\zeta) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases}$$

onde, com  $\partial/\partial z = d/d\zeta$  e  $\partial/\partial t = -c d/d\zeta$  (regra de cadeia) fizemos

$$\zeta \equiv z - ct \quad (12.4.4)$$

e  $E'_x(\zeta)$  é a derivada de  $E_x$  em relação a  $\zeta$ . Como  $B_y$  tem de ser da mesma forma,  $B_y = B_y(\zeta)$ , estas equações dão

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial z} &= B'_y(\zeta) = \frac{1}{c} E'_x(\zeta) \\ E'_x(\zeta) &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} = c B'_y(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad B_y(z,t) = \frac{1}{c} E_x(z-ct) \quad (12.4.5)$$

Temos portanto os dois pares de soluções independentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x(z-ct)\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} E_x(z-ct)\hat{\mathbf{y}} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

e (usando as substituições:  $E_x \rightarrow E_y$  ;  $B_y \rightarrow B_x$  )

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_y(z - ct)\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{B} &= -\frac{1}{c}E_y(z - ct)\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

Em ambos os casos, as ondas são *transversais* à direção de propagação  $\hat{\mathbf{z}}$ , e temos

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \quad (12.4.8)$$

ou seja,  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{z}})$  é um triedro ortogonal direto.

### *Ondas planas monocromáticas*

Até agora não especificamos a dependência da variável  $z - ct$ . A forma mais simples de onda é aquela para a qual esta dependência é *oscilatória*, com uma dada frequência angular  $\omega$  no tempo:

$$\mathbf{E} = A \cos[k(z - ct) + \delta]\hat{\mathbf{x}} = A \cos(kz - \omega t + \delta)\hat{\mathbf{x}} \quad (12.4.9)$$

onde

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (12.4.10)$$

é o *número de onda* e  $A$  é a *amplitude*.

Correspondentemente,

$$\mathbf{B} = \frac{A}{c} \cos(kz - \omega t + \delta)\hat{\mathbf{y}} \quad (12.4.11)$$

Uma onda deste tipo chama-se *harmônica* ou *monocromática*. Como vimos (*Física Básica* 2, Seç. 5.2), ela é periódica no tempo e no espaço, e temos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{período temporal} ; \nu = \frac{1}{T} = \text{frequência} \quad (12.4.12)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT = \text{período espacial} = \text{comprimento de onda} \quad (12.4.13)$$

$$\varphi \equiv kz - \omega t + \delta = \text{fase da onda} \quad (12.4.14)$$

$$\delta = \text{constante de fase} \quad (12.4.15)$$

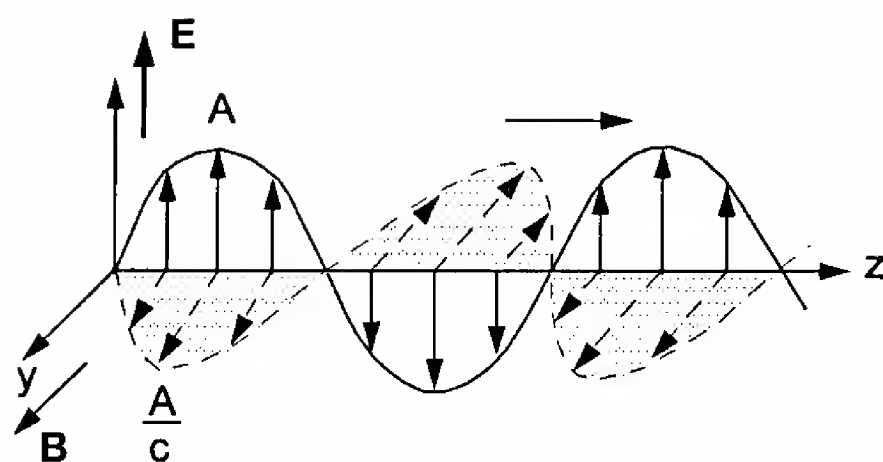


Figura 12.4 Onda plana monocromática

A fig. 12.4 dá uma idéia da forma da onda num dado instante. Num plano

$$z = \text{constante}$$

(perpendicular à direção de propagação) a fase  $\phi$  da onda é constante. Uma superfície  $\phi = \text{constante}$  chama-se *frente de onda*. Como as frentes de onda são planas, este tipo de onda chama-se *onda plana*: é uma idealização, porque preencheria todo o espaço e existiria para qualquer tempo.

Além de ser *transversal* à direção de propagação, o campo elétrico nas soluções encontradas permanece sempre num mesmo plano. Diz-se que a onda é *linearmente polarizada*.

As duas soluções independentes encontradas ( $\mathbf{E}$  na direção  $\hat{x}$  ou  $\mathbf{E}$  na direção  $\hat{y}$ ) correspondem às *duas polarizações lineares independentes* possíveis, que são ortogonais: qualquer outra direção de polarização linear é uma superposição destas duas.

É fácil passar desta escolha particular de eixos ( $\hat{z} \equiv$  versor da direção de propagação) ao caso geral de uma *onda eletromagnética plana monocromática* propagando-se numa direção de versor  $\hat{u}$  e *linearmente polarizada* numa direção  $\hat{e}$  (perpendicular a  $\hat{u}$ : onda transversal). Basta tomar:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re} \left\{ A \hat{e} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)] \right\} ; \quad \mathbf{k} = k \hat{u} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \hat{u} \times \mathbf{E} \quad \hat{e} \cdot \hat{u} = 0 \end{aligned} \quad (12.4.16)$$

onde adotamos notação complexa.

$\mathbf{k} \equiv$  vetor de onda

$\hat{e} \equiv$  versor de polarização

As duas soluções independentes (12.4.6) e (12.4.7) correspondem aos casos particulares em que  $\hat{e} = \hat{x}$  ou  $\hat{e} = \hat{y}$ , com  $\hat{u} \equiv \hat{z}$ .

## 12.5 Balanço de energia e vetor de Poynting

Vimos, para campos quase-estacionários, que a *densidade de energia eletromagnética no vácuo* é

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} = U_E + U_M \quad (12.5.1)$$

A taxa de variação temporal de  $U$  é portanto

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.5.2)$$

Para calcular o 2.º membro, vamos usar as equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \left\{ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j} \right\} & \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \right\} \\ \text{(II)} \quad \left\{ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} \right\} & \left\{ \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot } \mathbf{E} \dots\dots\dots \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) \end{aligned}$$

o que podemos escrever como

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})] \quad (12.5.3)$$

Vimos na Seq. 4.5 que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_c + \mathbf{E}_c \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

onde o índice  $c$  significa que o vetor com este índice permanece constante na diferenciação, ou seja, que  $\nabla$  só se aplica ao outro fator. Logo,

$$\mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B} = \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (12.5.4)$$

o que também pode ser verificado diretamente, em termos das componentes.

O resultado acima se escreve então

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \text{div } \mathbf{S} \quad (12.5.5)$$



onde definimos o *vetor de Poynting*  $\mathbf{S}$  por

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \equiv \text{Vetor de Poynting} \quad (12.5.6)$$

Vamos discutir agora a interpretação física da (12.5.5). Para isto, lembremos que, como estamos tratando de cargas e correntes no vácuo, a corrente  $\mathbf{j}$  está associada ao movimento de cargas livres. Sendo  $\rho$  a densidade de carga e  $\mathbf{v}$  a velocidade correspondente, temos então

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad \left\{ \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \right. \quad (12.5.7)$$

Por outro lado, a *densidade de força* com que o campo eletromagnético atua sobre as cargas e correntes é, pela (12.1.13),

$$\mathbf{f} = \rho \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) = \rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B} \quad (12.5.8)$$

A força magnética não realiza trabalho; temos

$$\rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (12.5.9)$$

e vemos que este termo representa o *trabalho por unidade de tempo e de volume* realizado pelo campo eletromagnético sobre as cargas em movimento.

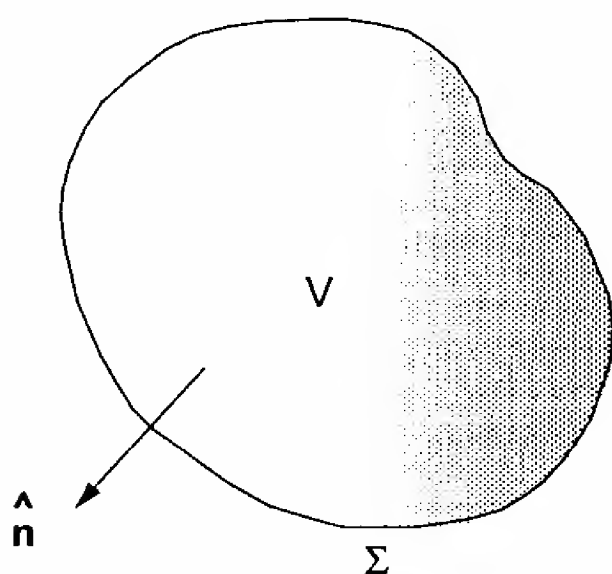


Figura 12.5 Volume de integração

Se integrarmos os 2 membros da (12.5.5) sobre um volume  $V$  limitado por uma superfície  $\Sigma$  (fig. 12.5) vem

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV &= \\ &= \int_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dV + \int_V \text{div } \mathbf{S} dV \end{aligned}$$

(12.5.10)

O 1.º termo do 2.º membro representa o *trabalho total por unidade de tempo* realizado pelo campo eletromagnético sobre as cargas contidas em  $V$ . Logo, pelo menos uma parte da energia eletromagnética é convertida nesse trabalho.

E o último termo? Pelo teorema da divergência,

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{S} dV = \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma} \quad (12.5.11)$$

representa um *fluxo para fora de V através de  $\Sigma$* .

Pela conservação da energia, temos então de interpretar esse fluxo como *o fluxo de energia eletromagnética para fora de V, por unidade de tempo*.

Isto dá a interpretação física do *vetor de Poynting S*: ele representa *a densidade de corrente de energia eletromagnética*.

Em particular, na ausência de cargas e correntes ( $\rho = \mathbf{j} = 0$ ), a (12.5.5) fica

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0} \quad (12.5.12)$$

que é a *forma local* da lei de conservação da energia eletromagnética (compare com a equação de continuidade, forma local da lei de conservação da carga:  $\operatorname{div} \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$ ).

### Aplicação a ondas planas

Numa onda eletromagnética plana (não necessariamente monocromática) que se propaga na direção de  $\hat{\mathbf{u}}$ , vimos que

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}} \quad (12.5.13)$$

com  $1/c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , o que dá

$$\boxed{\mathbf{B}^2 = \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^2 \quad \left\{ \quad \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right.} \quad (12.5.14)$$

ou seja, *numa onda plana, as densidades de energia elétrica e magnética são iguais*: a cada instante, metade da energia encontra-se sob a forma de energia elétrica e metade como energia magnética.

Para o vetor de Poynting, resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[ \mathbf{E}^2 \hat{\mathbf{u}} - \underbrace{(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{u}})}_{=0} \mathbf{E} \right] \\ &= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}_c} \cdot \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2U_E = \tilde{U}_E + U_M = U} \hat{\mathbf{u}} \quad \left\{ \quad \boxed{\mathbf{S} = c U \hat{\mathbf{u}}} \right. \end{aligned} \quad (12.5.15)$$

Este resultado tem uma interpretação física simples.

Para a corrente elétrica, uma densidade de carga  $\rho$  movendo-se com velocidade  $\mathbf{v}$  contribui  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  para a densidade de corrente. Como  $U$  é a densidade de energia e  $\mathbf{S}$  a densidade de corrente de energia,  $\mathbf{S}/U = c \hat{\mathbf{u}}$  é a *velocidade de propagação da energia eletromagnética*.

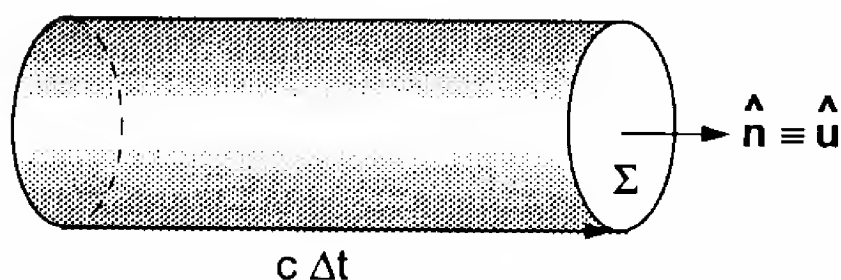


Figura 12.6 Energia que atravessa  $\Sigma$

Logo, uma *onda eletromagnética plana transporta energia, na direção e com a velocidade da onda*: a energia que atravessa uma área  $\Sigma$  normal a  $\hat{\mathbf{u}}$  durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  é a energia que está contida num cilindro de base  $\Sigma$  e geratriz  $c \Delta t$ , ou seja,  $U \Sigma c \Delta t$ , o que dá  $Uc$  para a energia por unidade de tempo e área (fig. 12.6).

No caso particular de uma onda plana monocromática,

$$\mathbf{E} = A \hat{\mathbf{e}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)$$

vem

$$\mathbf{S} = c \cdot \epsilon_0 A^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{u}} \quad (12.5.16)$$

de forma que o valor instantâneo da densidade de corrente de energia oscila, como a onda.

Interessa-nos então a *média temporal*  $\langle \mathbf{S} \rangle$  de  $\mathbf{S}$ , tomada sobre um período (ou, o que é equivalente, um número qualquer de períodos). Como a média de  $\cos^2$  é  $1/2$ , vem:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 A^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (12.5.17)$$

A *intensidade*  $I$  da onda eletromagnética é definida como o *valor médio da energia eletromagnética, por unidade de tempo, que atravessa uma área unitária, normal à direção de propagação  $\hat{\mathbf{u}}$* . Logo,

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{1}{2} c \epsilon_0 A^2 \quad (12.5.18)$$

## 12.6 A Equação de ondas inhomogênea

Como é gerada uma onda eletromagnética? No domínio macroscópico, sabemos que isto se faz através de uma antena emissora de rádio ou TV (por exemplo), alimentada

por um sinal gerado por um oscilador eletromagnético de alta frequência. As faixas de frequência apropriadas a estes exemplos foram especificadas acima.

Vamos estudar agora o modelo clássico mais simples para uma fonte de radiação, devido a Heinrich Hertz (1888). Este modelo idealizado representará uma *fonte puntiforme de radiação*, da mesma forma que uma carga puntiforme em repouso representa uma fonte puntiforme de campo eletrostático.

O ponto de partida são as equações de Maxwell *inhomogêneas* no vácuo,

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad \text{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} \\
 \text{(II)} \quad \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
 \text{(III)} \quad \text{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \text{(IV)} \quad \text{div} \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{12.6.1}$$

onde  $\mathbf{j}$  e  $\rho$  são funções *dadas* (supostas conhecidas: no exemplo acima, representariam a distribuição de corrente na antena emissora), de  $(\mathbf{x}, t)$ , que satisfazem a equação de continuidade:

$$\text{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

e queremos calcular  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .

Na eletrostática, como vimos, o cálculo do campo  $\mathbf{E}$  devido a uma dada distribuição de cargas é bastante simplificado pela introdução do *potencial escalar*  $\varphi$ : da equação (II) neste caso,  $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ , decorre  $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$ , e  $\varphi(\mathbf{x})$  obtém-se a partir de  $\rho$  pela (4.2.11)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} d^3\mathbf{x}' \quad , \quad r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|
 \tag{12.6.2}$$

que corresponde ao potencial coulombiano.

Aqui também obtemos uma grande simplificação introduzindo *potenciais*, a partir das equações *homogêneas* (II) e (IV). A (IV) dá

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}} \tag{12.6.3}$$

onde  $\mathbf{A}$  se chama o *potencial vetor*.

Substituindo na (II), resulta

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi$$

ou seja,

$$\boxed{E = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad (12.6.4)$$

onde  $\varphi$  é o *potencial escalar*; a eletrostática corresponde ao caso particular  $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ .

Até que ponto  $(\mathbf{A}, \varphi)$ , ficam determinados a partir de  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ? Como o rot de um grad é  $\equiv 0$ ,  $\mathbf{B}$  não se altera se substituirmos na (12.6.3)

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad } \chi} \quad (\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}') \quad (12.6.5)$$

onde  $\chi(\mathbf{x}, t)$  é uma função escalar arbitrária.

Substituindo na (12.6.4), fica

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \chi) = -\text{grad } \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

onde

$$\varphi' = \varphi + \partial \chi / \partial t \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi' - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{array} \right. \quad (12.6.6)$$

A transformação definida pelas (12.6.5) e (12.6.6), que não altera os campos  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , chama-se uma *transformação de calibre*, e diz-se que uma dada escolha de  $\chi$  corresponde a um *calibre*.

Substituindo as (12.6.3) e (12.6.4) nas equações de Maxwell inhomogêneas (I) e (III), vem:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \text{rot rot } \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{j} \\ \text{(II)} \quad -\text{div} \left( \text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \quad (12.6.7)$$

Para um vetor  $\mathbf{v}$  qualquer, desenvolvendo o duplo produto vetorial, temos

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}$$

o que *define*  $\Delta \mathbf{v}$ , o laplaciano de um vetor:

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \quad (12.6.8)$$

onde, em coordenadas cartesianas, justificando a definição de  $\Delta \mathbf{v}$ ,

$$\Delta \mathbf{v} \equiv \hat{x} \Delta v_x + \hat{y} \Delta v_y + \hat{z} \Delta v_z \quad (12.6.9)$$

Substituindo nas (12.6.7), fica

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j} \\ \text{(II)} \quad & -\Delta \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (12.6.10)$$

onde, na (II), somamos e subtraímos

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Se pudermos aproveitar a arbitrariedade na escolha dos potenciais para impor a *condição de Lorentz*

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (12.6.11)$$

resulta

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (12.6.12)$$

ou seja, tanto  $\mathbf{A}$  como  $\varphi$  satisfazem a *equação tridimensional de ondas inhomogênea*, cujos termos-fontes são dados por  $\mathbf{j}$  e  $\rho$  (sobre esta equação, veja *Física-Básica 2*, Seç. 6.5).

Para ver se é possível impor a (12.6.11), vamos supor que ela não seja satisfeita por um dado par  $(\mathbf{A}, \varphi)$  e vamos ver o efeito de uma transformação de calibre (12.6.5), (12.6.6):

$$\begin{aligned}
 \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \text{div}(\mathbf{A}' + \text{grad } \chi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi' - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\
 &= \text{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \left( \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{12.6.13}$$

Por conseguinte, se escolhermos  $\chi$  como solução de

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}
 \tag{12.6.14}$$

que é (outra vez) uma equação de ondas inhomogênea (cujo 2.º membro é suposto conhecido), resulta que  $(\mathbf{A}', \varphi')$  satisfarão a condição de Lorentz.

Logo, a resolução das equações de Maxwell inhomogêneas é equivalente à resolução da *equação de ondas* (tridimensional) *inhomogênea*.

## 12.7 Potenciais retardados

Como a equação para  $\mathbf{A}$  equivale a 3 equações de ondas escalares inhomogêneas (uma para cada componente), basta resolver a equação para  $\varphi$ ,

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho(\mathbf{x}, t) / \epsilon_0
 \tag{12.7.1}$$

que se reduz à equação de Poisson, no caso eletrostático ( $\partial \varphi / \partial t = 0$ ). A solução neste caso é, como sabemos, o potencial coulombiano devido a  $\rho$ , ou seja,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} d^3x'
 \tag{12.7.2}$$

onde a integral se estende a todo o espaço ocupado por  $\rho$ , satisfaz a

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) / \epsilon_0$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

é o potencial coulombiano em  $\mathbf{x}$  de uma carga puntiforme numericamente igual a  $4\pi\epsilon_0$  em  $\mathbf{x}'$ , de forma que

$$\Delta_{\mathbf{x}} \left[ \frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \right] = 0 \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}')
 \tag{12.7.3}$$

pois, fora da carga, o potencial satisfaz a equação de Laplace.

Isto também pode ser verificado diretamente, tomando a origem das coordenadas em  $\mathbf{x}'$  e procurando a expressão do  $\Delta$  de uma função que só dependa de  $r$  (distância à origem):

$$\Delta f(r) = \text{div grad } f(r) = \text{div} \left( \frac{df}{dr} \hat{\mathbf{r}} \right) = \text{div} \left( \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \mathbf{r} \right) \quad (12.7.4)$$

Mas já vimos que

$$\text{div}(F \mathbf{v}) = F \text{div } \mathbf{v} + \nabla F \cdot \mathbf{v} \quad (12.7.5)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \underbrace{\text{div } \mathbf{r}}_{=3} + \underbrace{\text{grad} \left( \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right)}_{=\left( -\frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \right) \hat{\mathbf{r}}} \cdot \mathbf{r} \\ &= \left( -\frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \end{aligned}$$

ou, como  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = r$ ,

$$\Delta f(r) = \frac{3}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} \quad (12.7.6)$$

o que também pode ser escrito (verifique!) como

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r f(r)] \quad (12.7.7)$$

Em particular, para  $f(r) = 1/r$ , isto dá,  $\Delta(1/r) = 0$  ( $r \neq 0$ ).

Uma consequência desta fórmula é que ela permite obter a solução geral *esfericamente simétrica* da equação de ondas *homogênea*

$$\Delta \varphi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(r, t) = 0 \quad (12.7.8)$$

Com efeito, pela (12.7.7), isto equivale a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \varphi(r, t)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

ou, multiplicando ambos os membros por  $r$ , e chamando

$$r \varphi(r, t) \equiv F(r, t) \quad (12.7.9)$$



$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0} \quad (12.7.10)$$

equação de ondas unidimensional, cuja solução geral já vimos:

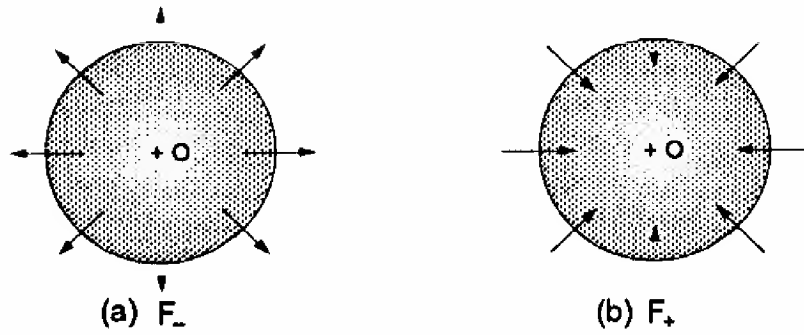


Figura 12.7 Os dois termos da (12.7.12)

$$\boxed{F(r, t) = F_-(r - ct) + F_+(r + ct)} \quad (12.7.11)$$

o que dá

$$\boxed{\varphi(r, t) = \frac{F_-(r - ct)}{r} + \frac{F_+(r + ct)}{r}} \quad (12.7.12)$$

O 1.<sup>o</sup> termo [Fig. 12.7(a)] representa uma *onda esférica divergente* e o 2.<sup>o</sup> [Fig. 12.7(b)] uma *onda esférica convergente*; note que a intensidade, em ambos os casos, cai com  $1/r^2$  e é singular na origem (*fonte* ou *sorvedouro* das ondas, respectivamente).

Combinando os resultados acima, podemos agora escrever a solução da equação de ondas 3-D *inomogênea* que generaliza o potencial coulombiano e representa a *emissão* de ondas pelas fontes. Afirmamos que esta solução é

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t' = t - \frac{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{c}\right)}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} d^3x'} \quad (12.7.13)$$

onde, como antes,  $r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , e a integral é estendida a toda a distribuição de cargas.

A (12.7.13) tem uma interpretação física muito simples. Numa teoria de ação à distância, o numerador do integrando seria  $\rho(\mathbf{x}', t)$  e a integral representaria o *potencial coulombiano instantâneo* criado pela distribuição de cargas no instante  $t$ .

Na (12.7.13), porém, o potencial em  $\mathbf{x}$ , no instante  $t$ , devido à carga contida num elemento de volume  $d^3x'$ , com centro em  $\mathbf{x}'$ , depende da densidade de carga  $\rho(\mathbf{x}', t')$ , nesse elemento, no *instante retardado*

$$\boxed{t' = t - \frac{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{c}} \quad (12.7.14)$$

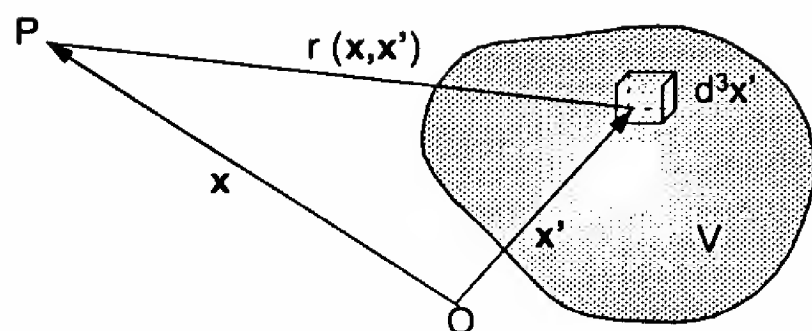


Figura 12.8 Interpretação física do potencial retardado

O retardamento

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/c = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$$

corresponde precisamente ao tempo que leva a interação para transmitir-se de  $\mathbf{x}'$  a  $\mathbf{x}$ , viajando com velocidade  $c$  (fig. 12.8).

A (12.7.13) chama-se *potencial retardado* criado pela distribuição, e exprime precisamente a diferença essencial entre uma teoria de ação à distância e uma teoria de campo: a *velocidade finita* ( $= c$  no vácuo) de propagação das interações eletromagnéticas.

Para pontos suficientemente próximos das cargas, o efeito de retardação é desprezível, e podemos usar o potencial Coulombiano instantâneo como boa aproximação, mas isto deixa de valer para distâncias maiores.

Vejamos agora como justificar o resultado (12.7.13). Para isto, consideremos inicialmente uma situação em que a fonte (distribuição de carga e corrente) pode ser tratada como "puntiforme", no sentido de que a *retardação sobre as dimensões da fonte seja desprezível em confronto com o tempo que leva para que  $\rho(\mathbf{x}', t')$  sofra uma variação apreciável*.

Neste caso, se  $\delta v$  é o volume que contém a distribuição, e se o "ponto de observação"  $\mathbf{x}$  está fora desse volume, ou seja,  $\rho(\mathbf{x}', t) = 0$ , podemos identificar  $\delta v$  com a origem de coordenadas ("ponto fonte") e notar que

$$t - \frac{r}{c} = -\frac{1}{c}(r - ct)$$

de modo que a (12.7.13) é da forma

$$\frac{1}{r} F_- \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

satisfazendo portanto a equação de ondas *homogênea*,

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}, t)$$

[pois  $\rho(\mathbf{x}, t) = 0$ ].

Isto não vale se  $\mathbf{x}$  está dentro de  $\delta v$ ; neste caso,  $1/r$  torna-se singular para  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ , mas  $d^3x' (= r^2 dr d\Omega$  em coordenadas esféricas) compensa esta singularidade, de forma que a contribuição de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

tende a 0 com as dimensões de  $\delta v$ . Entretanto, o mesmo não se aplica a  $\Delta \varphi$ , porque  $\Delta (1/r)$  contém derivadas segundas, que divergem como  $1/r^3$ .

Por outro lado, nesta contribuição, como  $\mathbf{x} \in \delta v$ , a retardação é desprezível, o que significa que

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi \Big|_{\mathbf{x} \in \delta v} = \Delta \varphi \Big|_{\mathbf{x} \in \delta v} = \Delta \left[ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int_{\delta v} \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x'} \right] = -\rho(\mathbf{x}, t) / \epsilon_0 \quad (12.7.15)$$

pois a expressão entre colchetes é o "potencial Coulombiano instantâneo" devido à distribuição.

Isto demonstra o resultado quando  $\mathbf{x} \in \delta v$  e quando  $\mathbf{x}$  está fora de  $\delta v$  (2.º membro = 0), ou seja, para uma fonte puntiforme, em qualquer caso.

Para demonstrá-lo em geral, basta agora usar o princípio de superposição, considerando uma distribuição qualquer como superposição de fontes puntiformes.

Para o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ , a única diferença é que a equação de ondas inhomogênea é *vetorial*, e que o 2.º membro é  $-\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ , em lugar de  $-\rho(\mathbf{x}, t)/\epsilon_0$ . Logo, a solução para  $\mathbf{A}$  é

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \left( \mathbf{x}', t' = t - \frac{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{c} \right)}{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x'} \quad (12.7.16)$$

que é o *potencial vetor retardado*.

Calculando  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  a partir de  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$ , obtém-se a solução correspondente das equações de Maxwell inhomogêneas no vácuo. É importante notar que esta não é a solução *geral* destas equações, por dois motivos:

- (a) Podemos sempre somar soluções das equações *homogêneas*, por exemplo, ondas planas em quaisquer direções.
- (b) Poderíamos ter tomado, em lugar de potenciais retardados, potenciais *avanzados*, em que, nas integrais,  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  seriam calculados no *instante avanzado*

$$t + \frac{r(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{c} = \frac{1}{c}(r + ct)$$

Isto corresponderia ao 2.<sup>o</sup> termo da (12.7.12).

Entretanto, isto corresponderia a calcular os valores *atuais* dos campos em função do comportamento de  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  no *futuro*, dados de que usualmente não dispomos, ao passo que os potenciais retardados correspondem ao campo eletromagnético atual gerado pelo comportamento de  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  no passado.

Assim, ao escolher os potenciais retardados, estamos introduzindo uma assimetria entre passado e futuro que não está contida nas equações de Maxwell, mas sim no tipo de problema que procuramos resolver.

## 12.8 O oscilador de Hertz

O modelo mais simples de uma fonte puntiforme de radiação eletromagnética, tratado por Hertz em 1888, baseou-se nos resultados experimentais que ele próprio obteve em 1887, comprovando a existência das ondas eletromagnéticas previstas pela teoria de Maxwell através de sua geração e detecção.

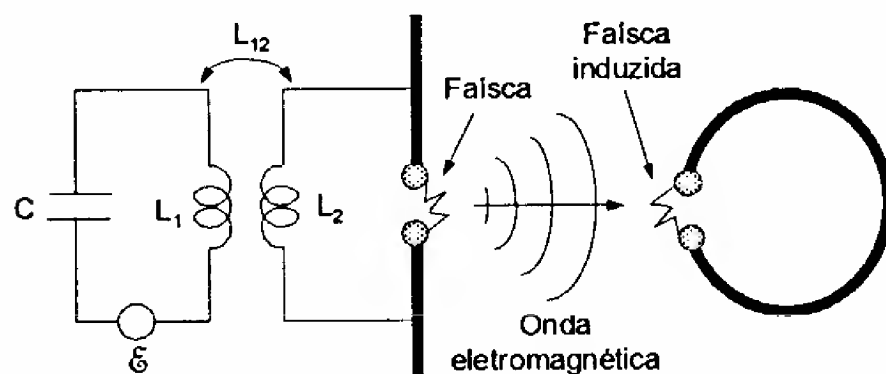


Figura 12.9 O experimento de Hertz

A aparelhagem que empregou para este fim está esquematizada na fig. 12.9. Duas esferas metálicas, separadas por um pequeno interstício, estavam ligadas ao secundário de um transformador, que produzia campos alternados de alta voltagem a partir de oscilações no circuito L-C primário. A voltagem elevada ionizava o ar e produzia uma descarga oscilante do ca-

pacitor formado pelas duas esferas acopladas ao secundário do transformador, fazendo saltar faíscas entre elas.

Para detetar as ondas eletromagnéticas geradas pela descarga oscilatória, Hertz usou um fio metálico em forma de aro (também terminando em um par de esferas metálicas), deixando um pequeno interstício entre as pontas, e de dimensões ajustadas para aproximar um circuito L-C ressonante com a frequência das oscilações eletromagnéticas geradas.

Hertz observou que cada faísca de sua "antena emissora" era acompanhada de uma faísca da "antena receptora", mesmo quando a separação entre elas era de vários metros. Medindo o comprimento de onda  $\lambda$  e a frequência  $\nu$  da radiação, ele pôde calcular a sua velocidade de propagação, verificando que coincidia com  $c$ . Ele havia gerado assim

pela primeira vez "ondas hertzianas" – ondas de rádio, com  $\lambda \gg$  que as dimensões dos circuitos usados.

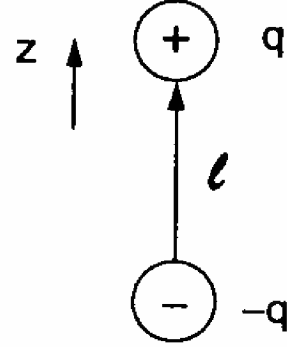


Figura 12.10 Dipolo hertziano oscilante

Para modelar a sua "antena emissora", Hertz usou um *dipolo elétrico puntiforme oscilante*, que pode ser pensado como representando as cargas  $\pm q$  das esferinhas metálicas (equivalentes às cargas nas placas de um capacitor), oscilantes com o tempo, acompanhando a oscilação da vol-

tagem do circuito, e com separação  $\ell = \ell \hat{z}$  igual ao interstício, levando ao momento de dipolo elétrico

$$\mathbf{p}(t) = q\ell = p(t)\hat{z} \quad (12.8.1)$$

tratado como puntiforme por ter dimensão  $\ell \ll \lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda das ondas hertzianas emitidas (fig. 12.10).

A variação temporal de  $p(t) = q\ell$  pode ter origem na variação de  $q$  com  $t$ , com  $\ell$  fixo (como na experiência de Hertz) ou na variação de  $\ell$  com  $q$  fixo,

$$\mathbf{p}(t) = q\ell(t) \quad (12.8.2)$$

o que poderia corresponder a uma oscilação de uma das cargas em torno da outra, suposta fixa.

Adotando esta última interpretação e substituindo  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  na expressão de  $\mathbf{A}$ , vem

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{r} \int \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \end{aligned} \quad (12.8.3)$$

onde usamos o fato de que a carga é puntiforme (retardação desprezível sobre suas dimensões) e  $r = |\mathbf{x}|$  é a distância à posição do dipolo, tomado como origem.

Como  $\mathbf{v} = d\ell/dt$ , resulta

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \quad (12.8.4)$$

onde o ponto (  $\dot{\phantom{x}}$  ) indica derivação em relação ao tempo.

Podemos agora usar esta expressão para calcular  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Para um vetor  $\mathbf{v}$  qualquer e um escalar  $f$ ,

$$\boxed{\text{rot}(f\mathbf{v}) = \nabla \times (f\mathbf{v}) = \nabla f \times \mathbf{v} + f \nabla \times \mathbf{v}} \quad (12.8.5)$$

lembrando que temos de derivar um produto; assim,

$$\boxed{\text{rot}(f\mathbf{v}) = \text{grad } f \times \mathbf{v} + f \text{rot } \mathbf{v}} \quad (12.8.6)$$

Na expressão acima,

$$\dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

onde  $\hat{\mathbf{z}} = \text{grad } z$ , o que dá  $\text{rot } \hat{\mathbf{z}} = 0$ . Logo,

$$\boxed{\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left[ \frac{\dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right] \times \hat{\mathbf{z}}} \quad (12.8.7)$$

Mas, para uma função  $f(r)$ , grad é a derivada direcional,

$$\boxed{\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \hat{\mathbf{r}}} \quad (12.8.8)$$

Logo, usando a regra da cadeia,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[ \frac{\dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}$$

$$\underbrace{\quad}_{-\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2} + \left( -\frac{1}{c} \right) \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{r}}$$

ou seja, como  $\frac{d}{dr} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ ,

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^2} \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{rc} \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \times \hat{\mathbf{r}}} \quad (12.8.9)$$

Pela (12.8.2),

$$\dot{\mathbf{p}} = q \mathbf{v} \quad , \quad \ddot{\mathbf{p}} = q \dot{\mathbf{v}} \quad (12.8.10)$$

ou seja, o 1.º termo da (12.8.9) é proporcional à *velocidade* da partícula e o 2.º termo à *aceleração* (ambas no instante retardado). O 1.º termo, proporcional a  $1/r^2$ , deve predominar para distâncias *pequenas* do dipolo ( $r \rightarrow 0$ ); o 2.º, que cai como  $1/r$ , para distâncias *grandes* ( $r \rightarrow \infty$ ).

Vejam os de início como interpretar fisicamente o 1.º termo. Para  $r$  suficientemente pequeno, o efeito da retardação é desprezível, e, pela (12.8.3), este termo se escreve

$$\mathbf{B}_1 \equiv \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \dot{\mathbf{p}}(t) \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d^3x' \quad (12.8.11)$$

Comparando com os resultados obtidos no Cap. 8, vemos que este é o *campo de Biot-Savart* corresponde à distribuição *instantânea*  $\mathbf{j}(\mathbf{x}', t)$ , ou seja, é o campo magnético que ela produziria se fosse uma corrente *estacionária*. O resultado corresponde portanto à aproximação de *correntes quase-estacionárias* discutida na Seq. 9.5.

A região próxima do dipolo, onde esta é uma boa aproximação para  $\mathbf{B}$ , chama-se *zona próxima*. Esta contribuição, como o campo coulombiano, cai com  $1/r^2$ .

Já o 2.º termo da (12.8.9) é um termo *novo*, que cai mais lentamente, como  $1/r$  apenas, e portanto predomina a grande distância:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \times \hat{\mathbf{r}} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (12.8.12)$$

A região onde vale esta aproximação chama-se *zona distante* ou *zona de onda*.

Como é gerado este termo com decréscimo mais lento? Para ver sua origem, consideremos o caso particular em que  $p(t)$  oscila com frequência angular  $\omega$ , como nas experiências de Hertz (*oscilador de Hertz*):

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad (12.8.13)$$

$$\dot{p}(t) = \omega p_0 \cos(\omega t) \quad \left\{ \quad \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \omega p_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right.$$

ou seja,

$$\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \omega p_0 \cos(kr - \omega t) \quad (12.8.14)$$

onde

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12.8.15)$$

é o número de onda.

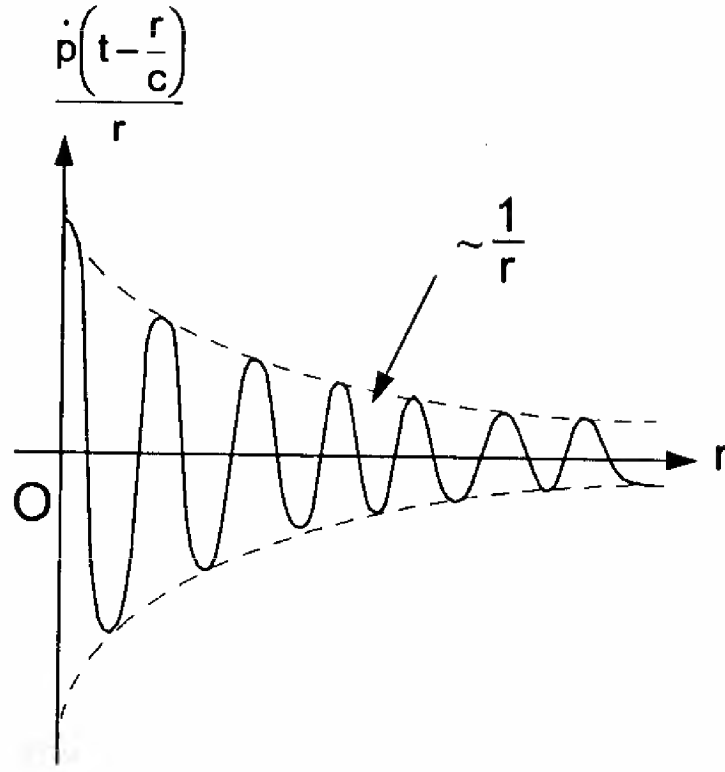


Figura 12.11 A função  $\dot{p}(t - r/c)/r$

A função

$$\frac{1}{r} \dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

que derivamos em relação a  $r$  na (12.8.7) para calcular  $\mathbf{B}$ , está representada na fig. 12.11. A *envoltória* cai com  $1/r$  (cuja derivada cai com  $1/r^2$ ) mas ela é modulada pela *oscilação* com  $r$  proveniente da *retardação* (propagação da onda), que transfere oscilações com  $t$  para oscilações em  $r$ , e cuja contribuição à derivada,

$$\frac{d}{dr} \cos(kr - \omega t) = -k \sin(kr - \omega t)$$

multiplica  $1/r$ , continuando a decrescer com este fator, em lugar de  $1/r^2$ . Logo, trata-se de um *efeito da retardação*.

Comparando a ordem de grandeza dos dois termos, podemos também definir mais precisamente a zona próxima e a zona de onda neste caso. Com efeito, obtemos

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\omega p_0}{r^2} \cos(kr - \omega t) - \frac{\omega^2 p_0}{rc} \sin(kr - \omega t) \right] \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} \quad (12.8.16)$$

e vemos que a razão do segundo termo para o primeiro é da ordem de  $(\omega/c)r = kr = 2\pi r/\lambda$ . Logo,

$$\begin{array}{ll} r \ll \lambda & \Leftrightarrow \text{zona próxima} \\ r \gg \lambda & \Leftrightarrow \text{zona de onda} \end{array} \quad (12.8.17)$$

Para circuitos AC, com  $\nu = 60 \text{ s}^{-1}$ ,

$$\lambda = c/\nu \cong \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{60 \text{ s}^{-1}} \cong 5 \times 10^6 \text{ m} = 5000 \text{ km}$$



de modo que estamos sempre na zona próxima, o que justifica a teoria das correntes quase-estacionárias neste caso.

Vamos calcular  $\mathbf{E}$  somente na zona de onda, desprezando termos que caem mais rapidamente a grande distância e usando apenas o termo dominante. Para isto, em lugar de calcular  $\varphi$  e usar

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

é mais simples usar a equação de Maxwell (I), que, a grande distância da distribuição de cargas e correntes ( $\mathbf{j} = 0$ ), é

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (12.8.18)$$

Para um oscilador de Hertz de frequência angular  $\omega$ , também é mais simples representar o termo dominante da (12.8.16) em notação complexa:

$$\boxed{\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \text{Re} \left[ \frac{i e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right] \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}} \quad (r \gg \lambda) \quad (12.8.19)$$

Com o fator temporal  $e^{-i\omega t}$ , tem-se  $\partial/\partial t = -i\omega$ , o que dá

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E} \quad \left\{ \quad \boxed{\mathbf{E} = i \frac{c^2}{\omega} \text{rot } \mathbf{B}} \right. \quad (12.8.20)$$

omitindo "Re", que fica subentendida. Assim, usando a (12.8.6),

$$\mathbf{E} \approx \underbrace{\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \cdot i \frac{c^2}{\omega} \cdot i}_{-\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{c}{k}} e^{-i\omega t} \underbrace{\text{rot} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} \right)}_{\substack{\text{grad} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) + \frac{e^{ikr}}{r} \text{rot}(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad \text{cai como } r^{-2}}} \quad (12.8.21)$$

O termo dominante, na zona de onda, vem da derivada de  $e^{ikr}$  (que representa a retardação  $e^{i\omega \frac{r}{c}}$ ), ou seja,

$$\mathbf{E} \approx -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \underbrace{\frac{c}{k}}_{ic} ik \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}})$$

Comparando com a (12.8.19), resulta

$$\boxed{\mathbf{E} = c \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}} \quad (r \gg \lambda) \quad (12.8.22)$$

Como isto vale para qualquer frequência  $\omega$ , vale também para qualquer dependência temporal de  $p(t)$ . Finalmente, com a (12.8.12), obtemos, na zona de onda,

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= c \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \times \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r c} \ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}} \quad (12.8.23)$$

Em ambos os campos, a dependência de  $\mathbf{x}$  e  $t$  vem do fator

$$\frac{1}{r} \ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Pelo visto na (12.7.12), concluímos que *o campo na zona de onda é uma onda eletromagnética esférica divergente*, centrada na posição do dipolo.

Vemos também que as relações entre  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  na zona de onda são as mesmas que as encontradas entre  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\hat{\mathbf{u}}$  (versor da direção de propagação) numa onda plana. Este resultado seria esperado, porque uma porção de uma frente de onda esférica, a grande distância da fonte, pode ser aproximada por uma porção de frente de onda plana.

Em particular, as densidades de energia elétrica e magnética são iguais; como  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  formam um triedro ortogonal direto, o vetor de Poynting é

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{\mu_0} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{B} = c \underbrace{\frac{B^2}{\mu_0}}_{2U_M = U_E + U_M = U} \hat{\mathbf{r}}$$

ou seja, como na (12.5.5),

$$\mathbf{S} = c U \hat{\mathbf{r}} = \frac{c}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_0^2}{16\pi^2 c^2 r^2} \left[ \ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}} \right]^2$$

o que dá, com

$$\frac{\mu_0}{c} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{c \epsilon_0} = \frac{1}{c^3 \epsilon_0}$$

para  $\mathbf{S}$  na zona de onda,

$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left[ \frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right]^2 \hat{\mathbf{r}}} \quad (12.8.24)$$

que é dirigido radialmente para fora, como deve ser numa onda esférica divergente.

O ponto fundamental é que  $S$  cai com  $1/r^2$ , de forma que o *fluxo de energia eletromagnética por unidade de tempo através de um elemento de ângulo sólido*  $d\Omega$ ,

$$dW = (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}) r^2 d\Omega \quad (12.8.25)$$

é  $\neq 0$ , mesmo para  $r \rightarrow \infty$ ,

$$dW = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left[ \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \times \hat{\mathbf{r}} \right]^2 d\Omega \quad (12.8.26)$$

representando *energia eletromagnética irradiada pela fonte*.

Se  $\mathbf{E}$  é um campo eletrostático e  $\mathbf{B}$  um campo magnético de correntes estacionárias, ambos caem no mínimo como  $r^{-2}$ , de modo que  $S$  cai com  $r^{-4}$  e  $dW/d\Omega \rightarrow 0$  como  $r^{-2}$ , ou seja, *não há radiação*. Ela só aparece para campos variáveis com o tempo, como consequência da retardação.

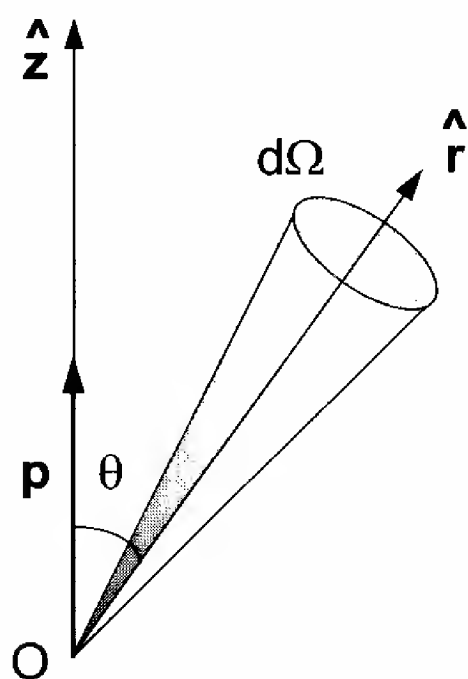


Figura 12.12 Radiação em  $d\Omega$

Como  $\ddot{\mathbf{p}}$  é paralelo a  $\hat{\mathbf{z}}$ , o resultado também se escreve

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left[ \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 \sin^2 \theta \quad (12.8.27)$$

onde  $\theta$  é a coordenada esférica usual (ângulo entre  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $Oz$ , fig. 12.12).

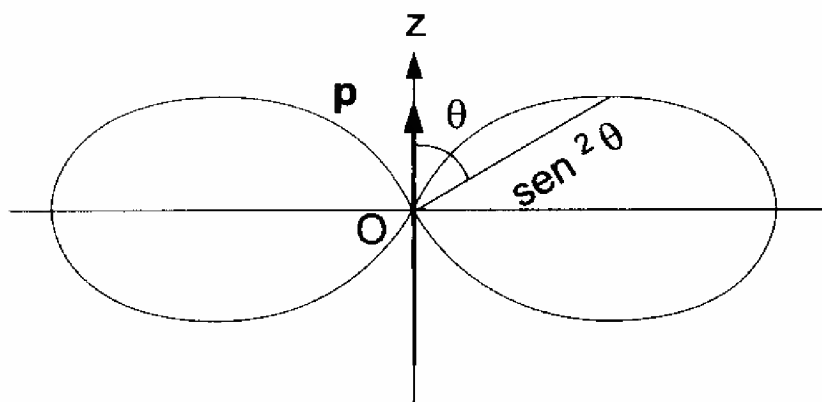


Figura 12.13 Distribuição angular da radiação de dipolo

Logo, a *distribuição angular* da radiação emitida pelo dipolo não é isotrópica: é proporcional a  $\sin^2 \theta$ , cujo diagrama polar está representado na fig. 12.13 (em 3 dimensões, é preciso imaginá-lo como axialmente simétrico em torno de  $Oz$ ). Em particular, a *radiação é máxima no plano equatorial* ( $\theta = \pi/2$ ), e o dipolo *não emite radiação na direção do seu eixo* ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ).

A *potência total irradiada*,  $W$  (taxa total de emissão de radiação por unidade de tempo) obtém-se integrando sobre todos os ângulos sólidos ( $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ ):

$$W = \oint \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left[ \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

Com  $\cos\theta = u$ ,

$$\int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

e vem

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \frac{\left[ \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]^2}{c^3} \quad (12.8.28)$$

Em particular, para uma carga  $q$  em movimento na direção  $z$ ,

$$p(t) = qz(t) \quad (12.8.29)$$

obtém-se a *fórmula de Larmor*

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left[ \ddot{z} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 \quad (12.8.30)$$

$W$  é proporcional ao quadrado da *aceleração retardada* da partícula. Assim, no modelo atômico de Bohr, a teoria clássica preveria o colapso das órbitas eletrônicas, devido à radiação.

Vemos que *uma carga em movimento retilíneo uniforme* (em relação a um referencial inercial) *não emite radiação*. Este resultado é consistente com o fato de que, no referencial da carga (que neste caso é também inercial) ela está em repouso.

O *oscilador de Hertz* é um caso particular, com (como vimos)

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{p} = -\omega^2 p \end{array} \right.$$

o que dá

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \frac{\omega^4}{c^3} p_0^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (12.8.31)$$

para a taxa *instantânea* de emissão de radiação. A taxa *média*  $\langle W \rangle$  obtém-se notando que, para o  $\sin^2$ , ela é

$$\langle \sin^2(\omega t - kr) \rangle = \frac{1}{2} \quad (12.8.32)$$

onde a média é tomada sobre um (ou vários) períodos, conforme já vimos. Resulta

$$\langle W \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\omega^4}{3c^3} (p_0)^2 \quad (12.8.33)$$

que cresce com a *quarta potência* da frequência, mostrando a importância crescente da perda por radiação a altas frequências, num circuito.

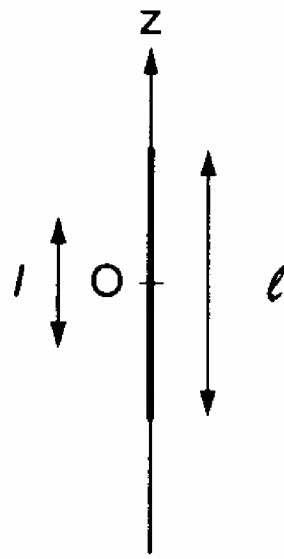


Figura 12.14 Antena de dipolo

Para ilustrar este ponto, consideremos (fig. 12.14) uma *antena retilínea curta*, formada por um fio metálico de comprimento  $l$ , alimentado com uma corrente oscilante, de intensidade

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) \quad (12.8.34)$$

Voltando à (12.8.3) e lembrando que neste caso é

$$\mathbf{j} d^3x' = I d\mathbf{l} \quad (12.8.35)$$

onde  $d\mathbf{l}$  é o elemento de linha ao longo do fio, obtemos

$$\int \rho \mathbf{v} d^3x' = \int \mathbf{j} d^3x' = \int I d\mathbf{l} = I \mathbf{l} = \dot{\mathbf{p}} \quad (12.8.36)$$

$$\ddot{\mathbf{p}} = \dot{I} \mathbf{l} = \omega I_0 l \sin(\omega t) \quad (12.8.37)$$

Vemos assim que, neste caso,

$$\left\langle \left[ \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \omega^2 l^2 I_0^2$$

e

$$\langle W \rangle_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{c^3} l^2 \cdot \frac{1}{2} I_0^2 \quad (12.8.38)$$

Se o fio tem resistência ôhmica  $R$ , a potência média dissipada pelo efeito Joule é

$$\langle W \rangle_{\text{Joule}} = R \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R \quad (12.8.39)$$

Comparando com a (12.8.38), definimos a "*resistência de radiação*" da antena por

$$R_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{c^3} l^2 \quad (12.8.40)$$

Esta é a resistência ôhmica que dissiparia a mesma potência média perdida por radiação.

Temos:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$$

Logo,

$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0 c} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (12.8.41)$$

onde a condição  $l \ll \lambda$  é necessária para que possamos assimilar a antena a um dipolo.

Vimos na (2.3.2) que, em valor numérico,

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 10^{-7} c^2$$

logo

$$\frac{2\pi}{3\epsilon_0 c} = \frac{8\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c} = \frac{8\pi^2 \times 10^{-7} c}{3}$$

e  $c \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ , o que dá

$$R_{\text{rad}} \approx 789 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (l \ll \lambda) \quad (12.8.42)$$

que cresce com o quadrado de  $(l/\lambda)$ . Mesmo para um fio de  $l \approx 0,1 \lambda$ , tem-se  $R_{\text{rad}} \approx 8 \Omega$ , de forma que, a frequências elevadas, a perda por radiação de um fio torna-se bem mais importante do que a perda ôhmica.

No espalhamento da luz por partículas dielétricas de tamanho  $\ll \lambda$  (comprimento de onda da luz), a luz incidente induz na partícula um momento de dipolo oscilante com a frequência da luz. A radiação emitida por este dipolo é a radiação espalhada. Por conseguinte, a intensidade da luz espalhada *cresce com*  $\omega^4$ . Como  $\omega_{\text{violeta}} \sim 1,8 \omega_{\text{vermelho}}$ , a componente azul da luz solar é espalhada com intensidade  $(1,8)^4 \cong 10$  vezes maior que a luz vermelha. Esta é a explicação de Lord Rayleigh para a cor azul do céu (trabalhos posteriores de Einstein e Smoluchovski mostraram que o

espalhamento é devido às *flutuações de densidade da atmosfera*). Na luz direta (não espalhada) predomina a cor vermelha, explicando o tom avermelhado do horizonte ao nascer ou pôr do sol.

## 12.9 Conclusão

Além de gerar artificialmente, pela primeira vez, ondas eletromagnéticas, e de mostrar que se propagam com velocidade  $c$ , Hertz também demonstrou que elas se refletiam em superfícies metálicas da mesma forma que a luz num espelho, e eram refratadas por um bloco de parafina, obedecendo às mesmas leis da refração da luz. Também demonstrou com elas efeitos de focalização e de interferências, em tudo análogos aos da luz, e concluiu:

"As experiências descritas me parecem em alto grau adequadas para remover as dúvidas sobre a identidade entre a luz, a radiação térmica, e as ondas eletromagnéticas."

Estes resultados, unificando a ótica e o eletromagnetismo, marcam o apogeu do que se chama de "física clássica". Veremos mais adiante (*Física Básica 4*) a *ótica eletromagnética*.

Ao tratar da radiação emitida por cargas em movimento, já encontramos a questão dos efeitos da passagem de um referencial inercial a outro sobre fenômenos eletromagnéticos; esta questão também apareceu na descrição assimétrica dos efeitos da indução eletromagnética conforme seja um ímã ou um circuito que se move.

Problemas deste tipo e resultados experimentais buscando efeitos do movimento da Terra sobre a velocidade da luz acabaram levando à formulação por Einstein, em 1905, da *teoria da relatividade restrita*. Nesta teoria, verificou-se ser necessário modificar as leis de Newton da mecânica, embora as equações de Maxwell tenham permanecido inalteradas. Entretanto, a relatividade restrita (que também será tratada no Vol. 4) ainda pertencia ao arcabouço da física clássica.

Na mesma experiência em que Hertz verificou a existência de ondas eletromagnéticas, ele observou que a luz (predominantemente azul-violeta) das centelhas da antena emissora facilitava a ocorrência de centelhas na receptora: isto porque provocava a *emissão de elétrons pelo metal* das esferas. Este efeito *fotoelétrico* acabou sendo um dos fenômenos que deram origem a um rompimento radical com a física clássica. Novamente, foi um trabalho de Einstein de 1905 (levando bem mais longe uma proposta de Max Planck em 1900), que explicou o efeito fotoelétrico em termos do que chamamos hoje de processos quânticos.

Fenômenos inexplicáveis pela física clássica já foram encontrados em diversas etapas deste curso. Veremos no vol. 4 como acabaram levando à formulação da *física quântica*.

Mesmo na teoria quântica, porém, as equações de Maxwell permanecem válidas, embora tenham de ser reinterpretadas. Atualmente, a teoria quântica das interações eletromagnéticas é o modelo básico para o tratamento de todas as interações consideradas como fundamentais.

Vemos assim que as equações de Maxwell, complementadas pela mecânica quântica, não só descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos e óticos a nível macroscópico, como também servem de paradigma para o tratamento das demais interações, em nível microscópico.

Num trecho famoso de seu romance "Em busca do tempo perdido", Marcel Proust descreve como, ao provar um doce\* conhecido como "madalena", mergulhando-o numa xícara de chá, quando já adulto, o gosto do doce com o chá evocou nele, repentinamente, as memórias de toda a sua infância, quando, morando na cidade de Combray, sua tia costumava oferecer-lhe, aos domingos, uma "madalena" mergulhada em chá. Este trecho é um paralelo apropriado para tudo aquilo que está contido nas quatro equações de Maxwell:

"E, como nesse passatempo japonês em que se mergulham numa tigela de porcelana cheia de água pedacinhos de papel até então indistintos, mas que, assim que são mergulhados, se estiram, adquirem contornos e cores, se diferenciam, transformam-se em flores, casas e personagens consistentes e reconhecíveis; assim também, agora, todas as flores do nosso jardim, do parque do Sr. Swann, e os nenúfares do Vivonne, e a boa gente da aldeia, com suas pequenas moradias, e a igreja, Combray inteira com seus arredores, tudo isso, que toma forma e solidez, saiu, cidade e jardins, da minha xícara de chá".

## PROBLEMAS

1. Um capacitor de placas paralelas é formado por dois discos circulares de raio  $a$  separados por uma distância  $d \ll a$ , no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador AC que produz uma carga no capacitor  $Q = Q_0 \sin(\omega t)$ . Admita que o campo  $\mathbf{E}$  entre as placas é uniforme, desprezando fuga de linhas de força, e tome o eixo  $z$  ao longo do eixo do capacitor. Calcule o campo  $\mathbf{B}$  entre as placas, a uma distância  $\rho$  do eixo.

2. Um fio condutor retilíneo cilíndrico muito longo, de condutividade  $\sigma$  e raio  $a$ , transporta uma corrente constante, de densidade  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  uniformemente distribuída sobre a secção transversal. Tome o eixo do cilindro como eixo  $z$ . (a) Calcule  $\mathbf{B}$  na superfície do fio; (b) Calcule

---

\* Uma espécie de bolinho em forma de concha.



o vetor de Poynting  $\mathbf{S}$  na superfície do fio; (c) Mostre que o fluxo de  $\mathbf{S}$  através da superfície de um trecho de comprimento  $l$  do fio é igual à energia dissipada em calor pelo efeito Joule nesse trecho, por unidade de tempo. Note que essa energia flui do espaço em torno do fio para dentro dele.

3. Suponha que uma lâmpada de 100 W emite toda a sua energia em forma de luz (despreze outras perdas), uniformemente em todas as direções. Estime os valores médios quadráticos de  $|\mathbf{E}|$  e  $|\mathbf{B}|$  a uma distância de 1 m da lâmpada.

4. A *constante solar*, a intensidade da radiação solar que atinge a atmosfera terrestre, vale  $2 \text{ cal/cm}^2$  por minuto. (a) Quais são os valores máximos de  $|\mathbf{E}|$  e  $|\mathbf{B}|$  correspondentes? (b) Sabendo que o raio do Sol é de  $6,9 \times 10^8 \text{ m}$ , e que a distância média Terra-Sol é  $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ , qual é a intensidade da radiação na superfície do Sol (supondo a emissão isotrópica e desprezando perdas)?

5. Mostre que, se definirmos a velocidade  $\mathbf{v}$  de propagação da energia eletromagnética, para um campo arbitrário no vácuo, por  $\mathbf{S} = U \mathbf{v}$ , onde  $U$  é a densidade de energia eletromagnética, generalizando a (12.5.15), tem-se

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) U^2 = (U_E - U_M)^2 + \frac{\epsilon_0}{\mu_0} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$$

onde  $v = |\mathbf{v}|$ . Daí decorre que  $v \leq c$ , e que só pode ser  $= c$  quando as densidades de energia elétrica e magnética são iguais e  $\mathbf{E}$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ , como numa onda plana. *Sugestão:* Use a identidade  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2$ , válida para dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  quaisquer.

## Respostas dos Problemas Propostos

### CAPÍTULO 2

1.  $2,3 \times 10^{39}$ .
2. (a)  $8,6 \times 10^3 \text{ C}$  ; (b)  $6,8 \times 10^{16} \text{ kgf}$  ; (c) A atração eletrostática é da ordem de  $10^6$  vezes maior.
3. (a)  $7,2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , da ordem das frequências da luz visível; (b)  $2,3 \times 10^3 \text{ km/s}$ , menos de 1% da velocidade da luz, podendo ainda ser tratada como não relativística. Não é consistente, na física clássica, usar a eletrostática neste modelo. Um estado estacionário só é obtido na física quântica.
5. (b)  $1,6 \times 10^{-6} \text{ C}$
6.  $9\sqrt{3} q Q / (16 \pi \epsilon_0 a^2)$ , horizontal, para a direita.
7.  $q Q / (2 \pi^2 \epsilon_0 a^2)$ , vertical, para cima.
8.  $q \lambda / (2 \pi \epsilon_0 \rho)$ , radial, para fora.
9.  $\omega = 2 \left( \frac{Qq}{\pi \epsilon_0 m d^3} \right)^{1/2}$

### CAPÍTULO 3

2. (i)  $\mathbf{E} = + \frac{e}{2\pi \epsilon_0} \frac{\rho}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{\rho}$  ; (ii)  $\omega^2 = \frac{e^2}{2\pi \epsilon_0 m (a^2 + \rho^2)^{3/2}}$
4. (a)  $\mathbf{E} = \frac{\lambda l}{4\pi \epsilon_0 d(l+d)} \mathbf{i}$  ; (b)  $5,4 \times 10^6 \text{ N/C}$

$$5. \quad |\mathbf{E}| = \frac{2\lambda}{\pi \epsilon_0 (a^2 + b^2)^{1/2}} \quad \text{vertical para baixo } (\lambda > 0).$$

$$6. \quad |\mathbf{E}| = \frac{2\lambda l D}{\pi \epsilon_0 (l^2 + D^2)(2l^2 + D^2)^{1/2}}, \quad \text{vertical para cima } (\lambda > 0).$$

$$7. \quad (a) \frac{q}{6 \epsilon_0}; \quad (b) 0 \text{ (faces adjacentes)}; \quad \frac{q}{24 \epsilon_0} \text{ (faces opostas)}.$$

$$8. \quad 1,8 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3$$

$$9. \quad 0 \text{ acima e abaixo de ambos}; \quad -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ entre os dois}.$$

$$10. \quad (a) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}; \quad (b) \quad \omega = e / (4 \pi \epsilon_0 m_e a^3)^{1/2}; \quad (c) \quad v \approx 7,2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$11. \quad 0$$

$$12. \quad \mathbf{E} = E(r) \hat{\mathbf{r}} \text{ onde } E(r) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} (0 \leq r \leq a); \quad E(r) = \frac{\rho a^3}{3 \epsilon_0 r^2} (a \leq r \leq b)$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} - \frac{\rho}{3 \epsilon_0 r^2} (b^3 - a^3) (b \leq r \leq c); \quad E(r) = \frac{\rho}{3 \epsilon_0 r^2} (c^3 - b^3 + a^3) (r > c)$$

$$13. \quad (a) \quad Q = 8 \pi \rho_0 a^3; \quad (b) \quad E(r) = \frac{2 \rho_0 a^3}{\epsilon_0 r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^2 + 2 \frac{r}{a} + 2 \right] \exp \left( -\frac{r}{a} \right) \right\}$$

$$16. \quad (a) \quad \mathbf{E} = E(\rho) \hat{\rho}; \quad (b) \quad E(\rho) = \frac{a^2 \delta}{2 \epsilon_0 \rho}; \quad (c) \quad E(\rho) = \frac{\rho \delta}{2 \epsilon_0}$$

**CAPÍTULO 4**

1. Centro em  $(\frac{2}{3}l, 0, 0)$ ; raio  $\frac{2}{3}l$ .

2. (a)  $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} (r \geq R)$ ;  $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) (0 \leq r \leq R)$ ;

(b)  $V(r) = 0 (r \geq R)$ ;  $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right] (0 \leq r \leq R)$ ;

3.  $U(\mathbf{r}) = -q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$

4. (a)  $U = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ ; (b)  $\mathbf{F} = \frac{qp}{2\pi\epsilon_0 z^3} \hat{\mathbf{z}}$ ; (c) 10 pN, atrativa.

5. (a)  $U = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

(b)  $U = \mp \frac{p_1 \cdot p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$  (-para paralelos, + para antiparalelos)

(c)  $U = \frac{p_1 \cdot p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ , alinhados paralelos; (d)  $3,4 \times 10^{-2} \text{ eV}$ ;  $2,5 \times 10^{-2} \text{ eV}$

6.  $3 \times 10^{-14} \text{ m}$

7. (a)  $U = -2T$ ; (b) 13,6 eV

8. (a)  $\Delta U = (1 - 2^{-2/3}) \frac{\frac{3}{5} Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ ; (b) 337 MeV

10. (a)  $V(0) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$ ; (b)  $v_\infty = \left( \frac{q\sigma R}{m\epsilon_0} \right)^{1/2}$

$$11. (a) W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad ; \quad (b) f(R) = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}$$

## CAPÍTULO 5

1. Negativo ;  $2e$

2. (a)  $\frac{2}{3} Q/C$  ; (b)  $Q^2/(12C)$  ; (c) Converte-se em outras formas de energia (calor, luz da faísca ao ligar).

4.  $2C$

$$5. \frac{10}{7} C$$

$$6. \frac{1}{2} \left( \sqrt{5} - 1 \right) C$$

$$7. \frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \left( D - d + \frac{d}{k} \right)$$

$$8. \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 A} \left[ \frac{1}{\kappa_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\kappa_2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right]$$

$$9. (a) \frac{1}{C} = \frac{d_1}{\kappa_1\epsilon_0 A} + \frac{d_2}{\kappa_2\epsilon_0 A} \quad ; \quad (b) \sigma = \frac{CV}{A}$$

$$10. (a) \mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\kappa\epsilon_0} (0 < r < a) \quad ; \quad = \frac{\rho a^3 \mathbf{r}}{3\epsilon_0 r^3} (r > a)$$

$$(b) V(0) - V(a) = \frac{\rho a^2}{6\kappa\epsilon_0}$$

**CAPÍTULO 6**

$$1. \quad (a) \quad v(x) = v_0 \left[ 1 + \frac{2evx}{mv_0^2 d} \right]^{1/2}$$

$$(b) \quad n(x) = \frac{i}{eAv_0} \left[ 1 + \frac{2evx}{mv_0^2 d} \right]^{-1/2}$$

$$2. \quad i = 1,39 \times 10^{-8} \text{ A}$$

$$3. \quad T = 2,4 \times 10^3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$4. \quad \sigma = 3,53 \times 10^{-14} \text{ } (\Omega \text{ m})^{-1}$$

$$5. \quad (a) \quad R = \frac{\kappa \epsilon_0}{\sigma C}$$

$$(b) \quad \text{Demonstração geral: } \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{CV}{\kappa \epsilon_0}, \quad i = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \frac{CV}{\kappa \epsilon_0} = \frac{V}{R}$$

$$6. \quad R = \frac{l}{S} \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_0)} \ln \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)$$

$$7. \quad (a) \quad R = r$$

(b) São iguais.

$$8. \quad (a) \quad R = 1,4 \Omega ; \quad (b) \quad r = 0,1 \Omega ; \quad (c) \quad 1,5 \text{ W} ; \quad (d) \quad 1,4 \text{ W} ; \quad (e) \quad 0,1 \text{ W}.$$

$$9. \quad 84,6\%$$

$$10. \quad (a) \quad \frac{n(x_2)}{n(x_1)} = \exp \left( -eE \frac{\mu_+}{D_+} \right) ; \quad (c) \quad 0,06 \text{ V}$$

**CAPÍTULO 7**

$$1. \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{B}_0|}{I}}$$

$$2. \quad (a) \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{d^3} ; \quad (b) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi d^3} \frac{|\mathbf{m}|}{|\mathbf{B}_0|}$$

$$3. \quad (a) \quad \nu = 1,4 \text{ MHz} ; \quad (b) \quad r = 2,1 \text{ m}$$

$$4. \quad R = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{B}'|} \frac{m}{e}$$

$$5. \quad \theta_0 = \frac{\pi a^2 |\mathbf{B}|}{\sqrt{Ik}} q$$

**CAPÍTULO 8**

$$1. \quad (a) \quad a_0 = 0,53 \text{ \AA} ; \quad (b) \quad i = \frac{e\hbar}{2\pi m a_0^2} = 1,05 \times 10^{-3} \text{ A}$$

$$(c) \quad |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 i}{2a_0} = 12,5 \text{ T} ; \quad (d) \quad \mu_B = 9,3 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$2. \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i b}{\pi(b^2 - x^2)} \hat{\mathbf{z}} \quad \text{nos dois casos.}$$

$$3. \quad |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 i}{\pi a b} \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$4. \quad (a) \quad \mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 i L^2}{2\pi \left( z^2 + \frac{L^2}{4} \right) \sqrt{z^2 + \frac{L^2}{2}}} \hat{\mathbf{z}} ; \quad (b) \quad \mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi z^3}, \quad \mathbf{m} = iL^2 \hat{\mathbf{z}}$$

$$5. \quad (a) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4R} \hat{\mathbf{z}} ; \quad (b) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4R} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$6. \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{(a-b)\theta}{ab} \hat{\mathbf{z}}$$

$$7. \quad \mathbf{F} = + \frac{\mu_0 i i'}{2\pi} \frac{ab}{d(d+a)} \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{repulsiva})$$

$$8. \quad (a) \quad \mathbf{B}(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 i}{a} \hat{\mathbf{z}}$$

$$9. \quad (a) \quad B(x) = \frac{\mu_0 ni}{2} \left[ \frac{\frac{1}{2}L - x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}L - x\right)^2}} + \frac{\frac{1}{2}L + x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}L + x\right)^2}} \right]$$

$$B(0) \approx \mu_0 ni \text{ para } L \gg a ; \quad B(L/2) = \frac{1}{2} B(0)$$

$$(b) \quad B(x) \approx \frac{\mu_0}{2\pi} nLi \frac{\pi a^2}{x^3} \left[ \text{dipolo magnético } m = nLi \left( \pi a^2 \right) \right]$$

$$10. \quad (a) \quad \mathbf{B}(0) = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R \hat{\mathbf{z}} ; \quad (b) \quad \mathbf{m} = \frac{\pi}{4} \sigma \omega R^4 \hat{\mathbf{z}}$$

$$11. \quad (a) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi} ; \quad (b) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [(\pi+1)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}]$$

## CAPÍTULO 9

$$1. \quad B = \frac{Q R}{N S}$$

$$2. \quad 3,13 \text{ mV}$$



$$3. \quad (a) \quad V = \frac{1}{2} \omega a^2 B ; \quad (b) \quad \tau = \frac{1}{2} I a^2 B ; \quad VI = \tau \omega$$

$$4. \quad (a) \text{ anti-horário } ; \quad (b) \quad a = g - \frac{B^2 l^2 v}{mR} ; \quad (c) \quad v_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2} ; \quad (d) \quad i_0 = \frac{Blv_0}{R}$$

$$(e) \text{ variação de energia potencial } = \text{ energia dissipada em calor } = mgv_0 \Delta t$$

$$5. \quad L_{12} = \frac{2\mu_0}{\pi} b \ln \left( \frac{d+a}{d-a} \right)$$

$$6. \quad L_{12} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi b^2}{a} \cos \theta$$

$$7. \quad L_{12} = \mu_0 b \left[ 1 - \sqrt{1 - (a/b)^2} \right]$$

$$8. \quad L_{11} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 L \ln \left( \frac{2R+L}{2R-L} \right)$$

$$9. \quad i = \frac{3}{2} \mu_0 \frac{\pi a^2 b^2 v I z}{R(z^2 + b^2)^{5/2}} ; \text{ opostas}$$

$$11. \quad (a) \quad \mathbf{F} = -\frac{B^2 a^2}{R} \mathbf{v} ; \quad (b) \quad \mathbf{F} = -\frac{B^2 a^2}{R} \mathbf{v}'$$

$$12. \quad (a) \quad \Phi = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{x} \right) ; \quad (b) \quad i = -\frac{\mu_0 I a b}{2\pi R t (a + vt)} , \text{ horário}$$

**CAPÍTULO 10**

1.  $R = 15 \, \Omega$

3.  $V(t) = \frac{1}{2} \mathcal{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \right]$

4.  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{LC}}$

5. (a)  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} , \gamma = \frac{1}{RC} ;$  (b)  $\omega_0 = 10^4 \text{ Hz} ; 11 \text{ períodos}$

6.  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} + \frac{1}{R - i/(\omega C)} = \sqrt{\frac{C}{L}}$  para  $\tau_L = \tau_C$

7.  $\omega_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C[L_1L_2 - (L_{12})^2]}}$

8.  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$

9. (a)  $I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \left[ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \varphi_L\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_L\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right]$

onde  $\tau_L = L/R$  e  $\varphi_L = \text{tg}^{-1}(\omega L/R) ;$  (b)  $\omega = R/L = 1/\tau_L$

10. (a)  $\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2} ;$  (b)  $\omega_L = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2}}$

onde  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \gamma = \frac{R}{L}$

11. (a)  $I(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) ;$  (b)  $\frac{1}{2}CE^2 ;$  (c)  $CE^2 ;$  (d)  $\frac{1}{2}CE^2$

$$12. (a) E = \omega A B \sin(\omega t), I = \frac{\omega A B \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

$$(b) \mathbf{m} = I A [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}]$$

$$(c) \boldsymbol{\tau} = -I A \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

$$13. (a) R = 2\pi a \rho N / S; (b) L = \pi a^2 \mu_0 N^2 / l; (c) \phi = -\arctg(\omega L / R)$$

## CAPÍTULO 11

$$1. 1,1$$

$$2. (a) 2; (b) 3 \times 10^{-3}, \text{ em comparação com valores da ordem de } 10^3$$

$$4. (a) \kappa_m = 1,22 \times 10^3; (b) 7,96 \times 10^3 \text{ A/m}; (c) 250$$

$$5. (a) 0,01 \text{ J}; (b) 0,04 \text{ J}; (c) 0,1 \text{ H}$$

$$6. B_1 = \frac{\mu N i}{2a + 3b}, B_2 = 2B_1$$

$$8. (a) \mathbf{B} = \mu_0 \left( 1 - \frac{2a^2}{l^2} \right) \mathbf{M}; (b) \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{2l^2} \right) \mathbf{M}$$

## CAPÍTULO 12

$$1. \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi a^2} \rho \omega \sin(\omega t) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$2. (a) \mathbf{B} = \frac{\mu_0 a}{2} |\mathbf{j}| \hat{\boldsymbol{\phi}}; (b) \mathbf{S} = -\frac{|\mathbf{j}|^2}{2\sigma} a \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

$$3. \langle |\mathbf{E}| \rangle \approx 54,4 \text{ V/m}, \langle |\mathbf{B}| \rangle \approx 1,84 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$4. (a) |\mathbf{E}|_{\max} \approx 1,02 \times 10^3 \text{ V/m}, |\mathbf{B}|_{\max} \approx 3,4 \times 10^{-6} \text{ T}; (b) 6,5 \times 10^9 \text{ KW/m}^2$$

## BIBLIOGRAFIA

A relação abaixo representa bibliografia adicional para o presente volume. Deve ser acrescida das referências já citadas nos volumes 1 e 2.

### *Livros-texto introdutórios*

- Feynman, R. P. , Leighton, R. B. e Sands, M. , *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 2, Addison-Wesley, Reading (1963).
- Halliday, D., Resnick, R. e Walker, J., *Eletromagnetismo*, 4.<sup>a</sup> ed., Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1997).
- Harnwell, G. P., *Principles of Electricity and Electromagnetism*, 2nd ed., Mc-Graw-Hill, N.Y. (1949).
- Purcell, E. M., *Eletricidade e Magnetismo*, Ed. Edgard Blücher, São Paulo (1973).
- Tipler, P. A., Física, vol. 2a. 2.<sup>a</sup> ed., Ed. Guanabara (1990).

### *Livros mais avançados*

- Becker, R. e Sauter, F., *Electromagnetic Fields and Interactions*, Blaisdell, N.Y. (1964).
- Hallén, E., *Electromagnetic Theory*, Chapman-Hall, Londres (1962).
- Jackson, J. D., *Eletrodinâmica Clássica*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1983)
- Jeans, J., *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Cambridge University Press (1948).
- Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, 5th ed., J. Wiley, N.Y. (1976).
- Leite Lopes, J., *A Estrutura Quântica da Matéria*, 2.<sup>a</sup> ed., Ed. UFRJ, Rio de Janeiro (1963).
- Lorrain, P. e Corson, D. R., *Electromagnetic Fields and Waves*, 2nd ed., W. H. Freeman & Co., San Francisco (1970).
- Marion, J. B., *Classical Electromagnetic Radiation*, Academic, N.Y. (1965).
- Panofsky, W. K. H. e Philips, M., *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading (1962).
- Reitz, J. R., Milford, F. J. e Christy, R. W., *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Ed. Campus, Rio de Janeiro (1982).
- Rezende, S. M., *A Física de Materiais e Dispositivos Eletrônicos*, Ed. da UFPe, Recife (1996).

- Shadowitz, A., *The Electromagnetic Field*, McGraw-Hill, N.Y. (1975).
- Slater, J. C., e Frank, N. H., *Electromagnetism*, McGraw-Hill, N.Y. (1947).
- Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, 3rd ed., McGraw-Hill, N.Y. (1969).
- Sommerfeld, A., *Electrodynamics*, Academic, N.Y. (1952).
- Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, N.Y. (1941).
- Tamm, I. E., *Fundamentals of the Theory of Electricity*, Ed. Mir, Moscou (1979).

*Clássicos e história*

- Faraday, M., *Experimental Researches in Electricity*, 2 vols., reprint, Dover. N.Y. (1965).
- Maxwell, J. C., *Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 vols. reprint, Dover, N.Y. (1954).
- Whittaker, E. T., *A History of the Theories of Aether and Electricity*, 2 vols., reprint, Harper Torchbooks, N.Y. (1960).

# ÍNDICE

## A

Ação à distância 16, 29  
 Agulha magnética 137  
 Âmbar 3  
 Amortecimento  
     fraco 200  
     subcrítico 199  
 Ampère (lei de) 141  
 Ampère (unidade) 8  
     definição 157  
 Amperímetro 135  
 Amplitude  
     complexa 203  
     de onda 273  
 Anel carregado 10, 47  
 Anel de Rowland 253  
 Ângulo sólido 24, 27, 55, 146  
 Aniquilação 101  
 Anisotropia 251  
 Antena  
     de dipolo 296  
     emissora 278, 287  
     receptora 287  
 Antiferromagnetismo 250  
 Átomo de Bohr 31, 237  
 Auto-indutância 176  
     de cabo coaxial 179  
     de bobina toroidal 180  
     de solenóide 176

## B

Balança de torção 6  
 Balanço de energia  
     do campo eletromagnético 274  
     motor 170  
 Banda  
     de condução 115  
     de passagem 222  
     de valência 115  
     proibida 222, 227  
 Bateria 121  
 Bétatron 172  
 Biot e Savart, lei de 147, 149  
 Blindagem  
     elétrica 68  
     magnética 257  
 Bobina toroidal 153, 181, 215, 253  
 Bohr  
     modelo atômico de 12  
 Buraco 118, 136  
 Bússola 127

## C

Cabo coaxial 180  
 Calibre 280  
 Camada  
     de dipolos magnéticos 145  
     de transição 93

## 314

Câmara de Wilson 130

Campo 52

conservativo 41

molecular 248

eletromagnético 2, 259

impresso 124

interno 248

Campo elétrico 27, 28, 121

de disco circular 32

de distribuição contínua

de carga 31

de plano uniformemente

carregado 31

de um fio 29

de uma camada esférica

de carga 29

de uma distribuição discreta

de carga 29

energia armazenada 80

na superfície de condutor 31

unidade de 45

uniforme 49

potencial de 49

Campo magnético 127

da Terra 127

de bobina toroidal 153

de dipolo magnético 153

de um solenóide 154

de um solenóide finito 155

de uma corrente retilínea

num fio 150

de uma espira circular no eixo 151

uniforme 133

movimento em 129

Capacitância 76

de capacitor cilíndrico 78

de capacitor esférico 79

de esfera 79

equivalente 79

pura 189

unidade de 76

Capacitor(es) 75, 190, 211

carga de 76

cilíndrico 77

em paralelo 79

em série 80

esférico 78

plano 75

Carga elétrica 3

conservação da 3, 101, 267

de polarização 102

de prova 16

densidade de 9

densidade superficial 34

distribuição linear 10

distribuição superficial 10

do elétron 11

elementar 11

ligada 90

livres 90

puntiforme 6, 83

quantização da 11

unidade de 7

Carga magnética 127, 258

Ciclo de histerese 247, 255

Cilindro homogeneamente

magnetizado 235

Circuito(s) 189

AC 202

bloqueador de altas frequências 217

bloqueador de

baixas frequências 218

com duas malhas 192

**Circuito(s) (cont.)**

magnéticos 253

L-C 194

R-C 193

R-L 194

R-L-C 194, 195

**Circulação 43, 58**

por unidade de área 60

propriedade aditiva da 59

**Coeficiente**

de acoplamento indutivo 183, 215

de difusão 121

de temperatura 105, 117

Hall 136

**Coercividade 247, 252****Concentração 66****Condição de Lorentz 281****Condições de contorno 46, 93****Condutividade 103****Condutor(es) 4, 115**

oco 68

**Conexão**

em paralelo 79

em série 80

**Confinamento 110****Conservação da carga**

elétrica 3, 101, 267

**Conservação de energia 42****Constante**

de atenuação por seção 222

de Curie 245

de Planck 109

de tempo

circuito R-C 195

circuito R-L 195

dielétrica 86

**Cor azul do céu 297****Corrente(s)**

alternada 202

circulantes 192

de Ampère 231

de carga de um capacitor 205

de deslocamento 263, 266

no vácuo 267

de Foucault 167, 255

de magnetização 231, 235

de polarização 263, 264

densidade de 99

elétrica 8, 99

estacionárias 103, 177, 290

intensidade 99

livres 235

persistentes 117

portadores 99, 136

quase-estacionárias 177, 290

sentido da 166

unidade de 99

**Coulomb (unidade) 8**

definição 156

**Coulomb, lei de 5, 6, 8****Criação de pares 101****Curva de magnetização 246****D****De Broglie**

comprimento de onda de 110

relação de 110

**Defasagem 210****Defeitos 116****Definição de campo magnético 128****Densidade**

de carga de polarização 102, 263

de carga livre 91



## Densidade (cont.)

- de corrente 100
- de corrente superficial 9, 89, 93
- de energia elétrica 81
  - do campo num dielétrico 92
- de energia eletromagnética 184
- de energia magnética 184, 254
- de força 132, 276
- de portadores 100
- superficial
  - de carga de polarização 94
  - de carga livre 94
  - de dipolos 145

## Descarga

- de capacitor 264
- oscilatória 287

## Descontinuidade

- do campo elétrico 87, 144

## Deslocamento

- de carga 89
- elétrico, vetor 92, 263

## Desmagnetização adiabática 245

## Diamagnéticos 237

## Diamagnetismo 240

## Dielétricos 86

## Diferença de potencial 44, 76, 123

## Difração de elétrons 110

## Dipolo elétrico 51

- em campo inhomogêneo 57
- energia potencial 56
- exemplos 53
- momento de 20
- oscilante 288
- puntiforme 145, 288
- torque sobre 56

## Dipolo magnético 145, 233

## Distribuição angular 294

## Distribuição de Fermi 113

## Divergência de um vetor 33, 35

## Divergência superficial 93

## Domínio de Weiss 251

## Dupla camada 54

## E

## Earnshaw

- teorema de 31

## Efeito(s)

- Barkhausen 253
- corona 70
- de beirada 77
- Einstein-de Haas 239, 250
- fotoelétrico 109, 298
- giromagnéticos 238
- Hall 135
- Joule 116, 119
- transientes 195

## Elemento

- ativo 191
- de área
  - coordenadas esféricas 25
- de corrente 132, 149
- passivo 191

## Eletrização por atrito 3

## Eletroímã 256

## Eletrólito 121

## Elétronvolt 45

## Elétrons

- ligados 88
- livres 88, 99, 106, 116

## Eletroscópio 4

**Energia**

- armazenada 80, 190
  - em capacitor 198
  - em indutor 192, 198
- conservação da 42
- de condutores carregados 84
- de configuração de cargas 73
- eletrostática 80
- magnética 182, 197
- potencial 42, 71, 85
- própria 83
- térmica 112
- total 42, 197

**Entreferro 256****Equação**

- constitutiva 236
- da continuidade 102, 263
- de condução do calor 66
- de diferenças finitas 219
- de Laplace 66, 284
- de ondas 268
  - homogênea 278
  - inhomogênea 282
- de Poisson 33, 65, 262
  - dentro de dielétrico 91

**Equações de Maxwell 65, 261**

- da eletrostática no vácuo 67
- da eletrostática num dielétrico 91
- inhomogêneas 279
- no vácuo 266
- para **B**, com correntes estacionárias 140
- para **E**, estático no vácuo 140

**Equipotencial 67****Escoamento**

- irrotacional 59
- rotacional 59

**Esfera condutora 81****Espectro**

- de bandas 114
- discreto 110

**Espira circular**

- num campo **B** uniforme 134

**Estado quântico 11****Éter 17, 266****Experimento de Hertz 288****Expoente crítico 247****F****Face**

- norte 135
- sul 135

**Faixas de energia 115****Farad 76****Faraday**

- experiência 161
- Michael 165

**Fase 204****Fator**

- de amortecimento 213
- de Boltzmann 242
- de mérito 201, 212
- de potência 210
- g de Landé 239
- Q 202

**Fem 125**

- Hall 134

**Fermi**

- distribuição de 114
- esfera de 113
- velocidade de 113

**Ferromagnéticos 237****Ferromagnetismo 246**

## 318

### Filtro(s) 217

- aplicações 228
- transmissor de altas frequências 225
- transmissor de baixas frequências 224
- transmissor de banda 225

### Fissão nuclear 75

### Flutuações de densidade 298

### Fluxo 22

- do campo elétrico 23
- de energia 294
- magnético 277, 294

### Fônons 116

### Fonte(s) 23, 27

- de campo elétrico 94
- de fem 191
- puntiforme de radiação 279

### Força

- contra-eletromotriz 170
- de Lorentz 129, 163
- eletromotriz 120, 123, 129, 163
- linhas de 21
- magnética
  - entre correntes 156
  - sobre uma corrente 132
  - sobre uma carga 128
- magnetomotriz 138, 235
- ponderomotriz 85

### Fórmula

- de Langevin 241
- de Larmor 295

### Fóton 109

- massa de repouso do 71

### Frente de onda 262

### Frequência angular

- de oscilações livres, circuito L-C 196, 212

### Frequência

- de cíclotron 131
- de corte 224

## G

### Galvanômetro 135

- balístico 138

### Garrafa de Leiden 75, 77

### Gauss 128

- lei de 28
- teorema de 38

### Gerador 191

- AC 191
- DC 191
- de corrente alternada 171
- eletrostático 71
- linear 170

### Geradores e motores 169

### Gradiente 43

- de concentração, 121

## H

### Henry 175

### Hipótese dos quanta 109

### Histerése 252

## I

### Ímã permanente 127, 257

### Impedância 206

- característica 223
- complexa 206
- circuito R-L-C 211

Impedância (cont.)

complexa (cont.)

circuito R-C 208

circuito R-L 206

iterativa 222, 223

Impureza 118, 119

receptora 119

Indução, lei da 161

eletrostática 5, 88

Indutância

mútua 175, 176

pura 189

Indutor 190, 211

Inércia da corrente 165, 195

Intensidade 278

Interação elétron-fonon 119

Intervalos proibidos 115

Isolante 4, 115

## J

Junções 118

## L

Lacuna 118, 119

Laplaciano 66

de um vetor 281

Lei

da difusão 121

da indução 161

da indução de Faraday 262

das malhas 192

de Ampère 139, 262

exemplos 142

de Biot e Savart 147, 149

de Coulomb 6

de Curie 245

de Curie-Weiss 248, 249

de Dulong e Petit 108

de Faraday 161

de Gauss 22, 27, 65

aplicações 30

de Kirchhoff 191, 209

de Lenz 165, 166

e conservação da energia 167

de Ohm 103, 105, 119, 120

modelo cinético 105

dos nós 193

Ligação química covalente 250

Linhas de corrente 103

Linhas de força 22, 33, 43, 160

de dipolo elétrico 54

de dipolo magnético 153

exemplos 22

magnéticas 128, 132

para corrente num fio 143

Livre caminho médio 108

## M

Madálena 298

Magnetita 127

Magnetização 233, 241

inomogênea 233

por rotação 238

residual 247

Magnéton de Bohr 249

Massa efetiva 118

Materiais

diamagnéticos 239

paramagnéticos 239

Maxwell, equações de; veja

Equações de Maxwell

## 320

Maxwell, James Clerk 263  
Média temporal 278  
Meio  
    isotrópico 236  
    magnético linear 236  
Microondas 180  
Millikan, experiência de 11  
MKSA, sistema 7  
Mobilidade 121  
Modelo  
    de Drude 118  
    microscópico 90  
Modos normais de vibração 110  
Molécula  
    de água 54  
    polar 54, 88  
Momento angular 238  
    intrínseco 238  
    orbital 238  
    total 238  
Momento de dipolo  
    elétrico 18, 88  
    magnético 134, 147, 238  
Momento de Fermi 112  
Monopolos magnéticos 127, 261  
Motor de indução 169  
Motor linear 169  
  
N  
Neurônios 56  
Nível  
    de energia 110, 111, 115  
    de Fermi 118  
Nós 192  
Notação complexa 203  
Número de onda 273

## O

Oersted  
    experiência de 139  
Ohm 105  
Onda(s) 116  
    confinadas 110  
    eletromagnética esférica 293  
        convergente 284  
        divergente 284, 293  
    eletromagnética plana 271  
        monocromática 273  
    eletrônicas 116  
    hertzianas 287  
Operador diferencial 64  
Oscilações amortecidas  
    circuito R-L-C 198  
Oscilações forçadas 202  
Oscilações livres 202  
    circuito L-C 195  
Oscilador de Hertz 287  
Oscilador harmônico  
    amortecido 199

## P

Par de Cooper 117  
Paramagnéticos 237  
Paredes de Bloch 251  
Perda de histerese 255  
Permeabilidade magnética 236  
    do vácuo 236  
    relativa 236, 254  
Permissividade do espaço livre 7  
Pilha voltaica 121  
Poder das pontas 70

Polarização dielétrica 88, 127

homogênea 89

inhomogênea 90

Pólos de um ímã 127

Ponto de Curie 248

Portadores 106

Pósitron 131

Potência

dissipada 189

instantânea 210

média 210

Potencial

coulombiano 44, 45, 284

de ação 56

de anel carregado 47

de carga puntiforme 44

de casca esférica 50

de cilindro carregado 48

de dipolo elétrico 51

de disco carregado 47

de distribuição de cargas 45

de dupla camada 54

de esfera condutora 51

de membrana 55

eletrostático 41

escalar 279

escalar magnético 143, 152

logarítmico 49

retardado 285

vetor 147, 280

Potência

ôhmica 122

Priestley

experiência de 71

Primário 215

Primeira lei de Kirchhoff 192

Princípio

de exclusão 111

de Pauli 111, 113, 250

de superposição 9, 16

Problema de contorno 46

Propriedades ondulatórias 107

Proust, Marcel 298

## Q

Quadratura 198, 205

Quanta 109

Quantização da energia 111

Quark 11

Queda de potencial 189

## R

Radiação 294

de dipolo 294

Raio clássico do elétron 84

Rarefação 66

Razão giromagnética clássica 237, 238

Reatância 203, 225

capacitiva 205

indutiva 205

Rede

cristalina 107, 116

periódica 218

Relatividade restrita 297

Relutância 255

Remanência 247, 252

Resistência 225

de radiação 297

interna 123

pura 189

unidade de 105

## 322

Resistividade 104  
    residual 116  
    variação com temperatura 105  
Resistor 189  
Resposta transiente 203  
Ressonância  
    curvas de 213  
    frequência de 213  
    largura de 213  
Retardação 17, 291  
Rigidez dielétrica 70  
Rotacional de um vetor 63

## S

Saturação 247  
Secundário 215  
Segunda lei de Kirchhoff 191  
Seletividade 215  
Seletor de frequências 215  
Semicondutor 105, 115  
    extrínseco 118  
    intrínseco 117  
Simetria 21, 22  
Síncrotron 175  
Solenóide 155  
Solução estacionária 202  
Sorvedouros 67, 284  
Spin 249  
Steradianos 25  
Stokes  
    teorema de 61  
Supercondutividade 105, 117  
Supercondutores 117  
    de alta temperatura 117  
Superfície  
    de descontinuidade 93

    eqüipotencial 43, 45  
    gaussiana 28, 88

Superposição, princípio de 8

Susceptibilidade  
    diamagnética 244  
    dielétrica 91  
    inicial 242, 247  
    magnética 236  
    molar 242  
    paramagnética 244

## T

Tandem 73  
Taxa de amortecimento 201  
Temperatura  
    crítica 117  
    de Curie 251  
Tensão 85  
Teorema  
    da divergência 261  
    de Earnshaw 31, 67, 85  
    de Gauss 37  
    de Stokes 63, 95  
    do rotacional 261  
Terra 4, 80  
Tesla 128  
Torque  
    num campo magnético  
    uniforme 133  
Trajetórias ortogonais 43  
Transformação de calibre 280  
Transformador 202, 215  
Transistores 118  
Transitórios 195  
Transversalidade 273

**U****Unidade**

- de campo elétrico 45
- de campo magnético 128
- de carga elétrica 7
- de capacitância 77
- de corrente elétrica 155
- de fluxo magnético 132
- de resistência 105

**V**

Valor eficaz 208, 209

Valor médio 106, 208  
temporal 209

Van de Graaff  
gerador de 72

Vazão 23

**Velocidade**

- da luz 271
- de Fermi 107

**Velocidade (cont.)**

- de propagação de ondas 270
- de propagação da energia 278
- terminal 107

Versor de polarização 274

**Vetor**

- axial 129
- de onda 274
- de Poynting 274
- deslocamento elétrico 92, 262

Voltagem 87, 122

**W**

Weber 132

**Z****Zona**

- de onda 290
- distante 290
- próxima 290



Este curso universitário de Física Básica destina-se aos estudantes de engenharia, física, matemática, química e áreas correlatas. O objetivo é dar uma discussão detalhada e cuidadosa dos conceitos e princípios básicos da física, com ênfase na compreensão das idéias fundamentais. Procura-se desenvolver a intuição e a capacidade de raciocínio físico, bem como motivar e interessar os estudantes.

O volume 3, "Eletromagnetismo", apresenta a fundamentação fenomenológica da teoria eletromagnética, seguindo seu desenvolvimento histórico e construindo gradualmente as equações de Maxwell. Os problemas propostos são da ordem de uma centena, todos com respostas.

#### O Autor

Moysés Nussenzveig, professor emérito da Universidade Federal do Rio de Janeiro, foi também professor titular das Universidades de Rochester e São Paulo, da PUC-Rio e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, professor ou pesquisador visitante do Institute for Advanced Study de Princeton, da Universidade de Paris, do Goddard Space Flight Center da NASA, do Collège de France e da École Normale Supérieure.

É prêmio Max Born e "Fellow" da Optical Society of America, "Fellow" da American Physical Society, homenageado na Universidade de Tel Aviv com a Cátedra Moysés Nussenzveig de Mecânica Estatística, Prêmio Nacional de Ciência e Tecnologia e detentor da Grã-Cruz da Ordem Nacional do Mérito Científico.



EDITORA EDGARD BLÜCHER LTDA.

ISBN 85-212-0134-6



9 788521 201342